Corso di laurea in Ingegneria Gestionale
Esame di ALGEBRA LINEARE - anno accademico 2024/2025

Prova scritta del 24/01/2025

TEMPO A DISPOSIZIONE: 120 minuti

	MARCO	
(Cognome)	(Nome)	(Numero di matricola)

PRIMA PARTE

PUNTEGGIO : risposta mancante = 0 ; risposta esatta = +1 risposta sbagliata = -1
calcoli e spiegazioni non sono richiesti

- $z = 2 + i5$, $w = 4 + i3 \Rightarrow Re(z \cdot w) =$ $\boxed{-7}$

- Sia $z = -i4$. Scrivere z nella rappresentazione trigonometrica $z = \varrho \cdot e^{i\vartheta}$: $z =$ $\boxed{4 \cdot e^{i\frac{3}{2}\pi}}$

- Dati W e Z i seguenti sottospazi di $\mathbb{R}^3$:

$$W = \{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \ : \ x_1 + 3x_2 + x_3 = 0\}, \ Z = \langle \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} \rangle .$$ Allora $\mathbb{R}^3 = W \bigoplus Z$ | vero | falso |

- Determinare una base di W

$$\boxed{\left\{ \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}}$$

- $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} \implies \dim(Ker(l_A)) = \boxed{2} \qquad rg(A) = \boxed{3}$

- $\det \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \boxed{5}$

- $\begin{pmatrix} 2 & 5 & 5 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \implies m.a.(2) = \boxed{2}$

- Il vettore $\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ è autovettore dell'applicazione lineare associata alla matrice (barrare la matrice giusta)

$$A_1 = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad A_3 = \cancel{\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}} \qquad A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \implies A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$

- Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ lineare. Sapendo che $f\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$, $f\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 4 \end{pmatrix}$, allora $f\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \end{pmatrix}$

Treccie SOL.

(1) $\begin{cases} (z+3i)^5 = 4(z+3i) \\ |z| \leq 3 \end{cases}$

1. $z+3i = w \longrightarrow$ eq: $w^5 = 4w$

$w = \rho \cdot e^{i\vartheta}$ eq. $\Leftrightarrow \begin{cases} \rho^5 = 4\rho \\ 5\vartheta = \vartheta + 2k\pi \end{cases}$

SOL. $\rho = 0 \Leftrightarrow w = 0$ $\begin{cases} \rho = \sqrt[4]{4} = \sqrt{2} \\ \vartheta = \frac{2k\pi}{4} \end{cases}$ $k = 0, 1, 2, 3$

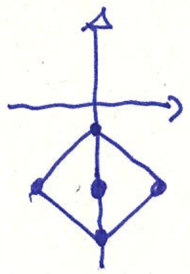
$z = w - 3i \Longrightarrow$ sol. di 1. $z_0 = \sqrt{2} - 3i$

$z_1 = (\sqrt{2} - 3)i$

$z_2 = -\sqrt{2} - 3i$

$z_3 = (-\sqrt{2} - 3)i$

$z_4 = -3i$



2. $|z| \leq 3 \Leftrightarrow \sqrt{x^2+y^2} \leq 3 \Leftrightarrow x^2+y^2 \leq 9$

SOLUZIONI: z_1, z_4

2 $A_t = \begin{pmatrix} 0 & 2 & t \\ 1 & t & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

$\det(A_t) = -t^2 + t + 2$

$\det = 0 \iff t = 2, -1$

i) $t \neq 2, -1$ $\quad rk = 3 \quad \dim Ker = 0$

$t = 2, -1$ $\quad rk = 2 \quad \dim Ker = 1$

ii) A_t matrice 3×3 $\quad (A_t|b)$ matrice 3×4

$t \neq 2, -1 \quad \exists!$ sol.

$t = 2: \quad rg(A_t) = 2 = rg(A_t|b) \Rightarrow \exists\ \infty$ sol.

$t = -1: \quad rg(A_t) = 2 < 3 = rg(A_t|b) \Rightarrow$ non $\exists$ sol.

iii) $t = -1: \quad Im(f_{A_t}) = Span\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$

dim $= 2 \Rightarrow$ # equazioni $= 3 - 2 = 1$

eq: $\quad a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 = 0$

$$\begin{cases} a_2 + a_3 = 0 \\ 2a_1 - a_2 + a_3 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{array}{l} a_2 = t \\ a_3 = -t \\ a_1 = t \end{array}$$

un'equazione è: $\quad x_1 + x_2 - x_3 = 0$

3) $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ t.c.

$\mathrm{Im}(f) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$, $\mathrm{Ker}(f) = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$

$f \leftrightarrow A$ matrice 3×3

$\mathrm{Im}(f) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \Rightarrow$ le colonne di A sono multiple di $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{Ker}(f) \Rightarrow$ colonna 2 di $A = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Possiamo provare $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \alpha \\ -2 & 0 & -2\alpha \\ 1 & 0 & \alpha \end{pmatrix}$

$A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \alpha = -1$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

(4) $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$P_A(\lambda) = (1-\lambda)^2 \cdot \lambda^2$

AUTOVALORI : 1 $\quad m.a.(1) = 2 \quad m.g.(1) = 2$

$0 \quad m.a.(0) = 2 \quad m.g.(0) = 2$

A è triang.le & diag.le poiché
le radici di $P_A(\lambda)$ sono reali
& $\forall \lambda_i$ si ha $m.a. = 2 = m.g.$

Autospazi:

$V_0 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$

$V_1 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$