Corso di laurea in Ingegneria Gestionale
Esame di ALGEBRA LINEARE - anno accademico 2024/2025

Prova scritta del 18/12/2024
TEMPO A DISPOSIZIONE: 120 minuti

	MARCO	
(Cognome)	(Nome)	(Numero di matricola)

PRIMA PARTE

PUNTEGGIO : risposta mancante = 0 ; risposta esatta = +1 risposta sbagliata = -1

calcoli e spiegazioni non sono richiesti

- Sia $z = -2 + i2\sqrt{3}$. Scrivere z nella rappresentazione trigonometrica $z = \varrho \cdot e^{i\vartheta}$: $z = \boxed{4 \cdot e^{i\frac{2}{3}\pi}}$

- $z = -2 + i2\sqrt{3} \Rightarrow z^3 = \boxed{64}$

Dati W e Z i seguenti sottospazi di $\mathbb{R}^3$:

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \ : \ x_1 - 2x_2 - x_3 = 0 \right\}, \ Z = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \ : \ x_2 - x_3 = 0 \right\}.$$

- $\mathbb{R}^3 = W \bigoplus Z$ | vero | ~~falso~~ |

- Determinare una base di $W \cap Z$

$$\boxed{\left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}}$$

- $A = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 1 & 1 & 2 & 9 & 2 \\ 4 & 5 & 1 & 0 & 2 & 9 & 2 \\ 4 & 5 & 1 & 0 & 0 & 9 & 2 \end{pmatrix} \Longrightarrow \dim(Ker(\mathcal{L}_A)) = \boxed{4} \quad rg(A) = \boxed{3}$

- $\det \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \boxed{-3}$

- $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow A$ è diagonalizzabile | vero | ~~falso~~ |

- Data $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ determinare il coefficiente di posto $(1, 3)$ della matrice A^{-1} : $\boxed{1/4}$

- $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow A \cdot B = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$

- Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ lineare. Sapendo che $f\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $f\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 7 \end{pmatrix}$, allora $f\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$

18 - 12 - 2024

Traccia soluzioni

(1) $\begin{cases} z^6 = 16\,\bar{z}^2 \\ |e^z| = e^2 \end{cases}$

1ª eq. $z = \rho \cdot e^{i\vartheta}$

$z^6 = 16\,\bar{z}^2 \iff \rho^6 \cdot e^{i6\vartheta} = 16 \cdot \rho^2 \cdot e^{-i2\vartheta}$

$\iff \begin{cases} \rho^6 = 16\,\rho^2 \\ 6\vartheta = -2\vartheta + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases}$

Sol. distinte

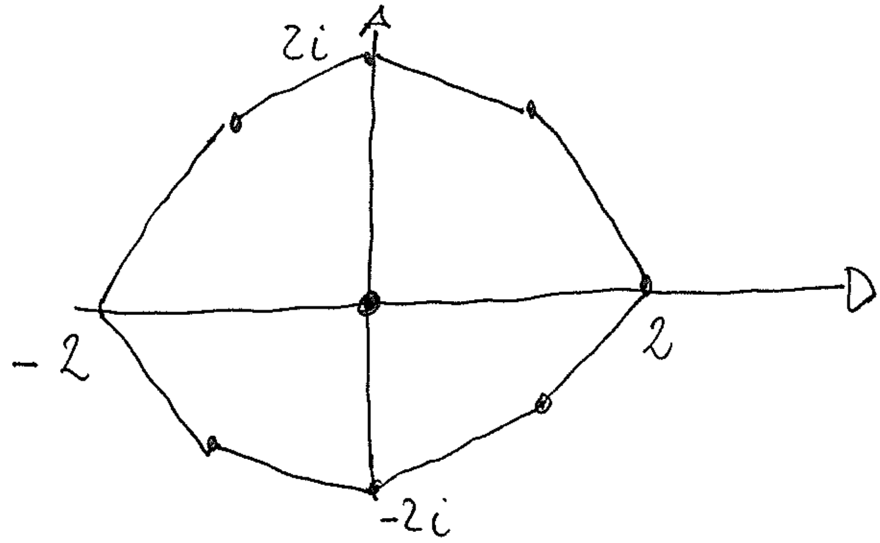
$\rho = 0 \iff z = 0$ $\qquad \begin{cases} \rho = \sqrt[4]{16} = 2 \\ \vartheta = \dfrac{2k\pi}{8} \quad k = 0, 1, \dots, 7 \end{cases}$

$z_0 = 2 \qquad z_1 = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$

$z_2 = 2i \qquad z_3 = -\sqrt{2} + i\sqrt{2}$

$z_4 = -2 \qquad z_5 = -\sqrt{2} - i\sqrt{2}$

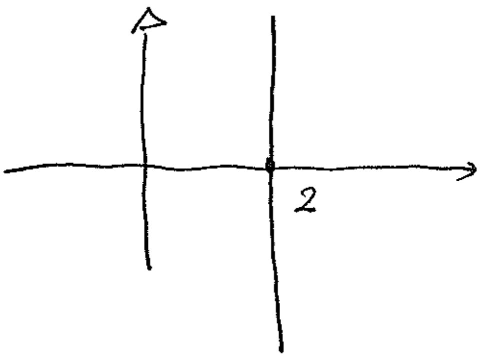
$z_6 = -2i \qquad z_7 = \sqrt{2} - i\sqrt{2} \qquad z_8 = 0$



2ª eq. $$|e^z| = |e^{x+iy}| = \underbrace{|e^x|}_{\in\mathbb{R}^+} \cdot \underbrace{|e^{iy}|}_{=1} = e^x$$

QUINDI

$$|e^z| = e^2 \iff \begin{cases} e^x = e^2 \\ y \text{ qualsiasi} \end{cases} \iff \begin{cases} x = 2 \\ y \text{ qualsiasi} \end{cases}$$



SOLUZIONE SISTEMA : $z_0 = 2$

2 $A_t = \begin{pmatrix} 0 & t & 3 \\ t & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

i) $\det(A_t) = -t^2 + 6t - 9 = -(t-3)^2$

$\det(A_t) = 0 \iff t = 3$

Per $t \neq 3$ $\quad \det(A_t) \neq 0 \Rightarrow rk(A_t) = 3$

$\dim(Ker) = 0 = 3 - 3$

Per $t = 3$ $\quad A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad \det = 0$

$M = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$ ha $\det \neq 0 \Rightarrow rk(A_t) = 2$

$\dim(Ker) = 3 - 2 = 1$

ii) Per $t \neq 3$ $\quad rk(A_t) = 3$

$(A_t \,\vdots\, b)$ matrice $3 \times 4 \Rightarrow rk \leq 3$

Pertanto $\quad 3 = rk(A_t) \leq rk(A_t | b) \leq 3$

$\Rightarrow \quad rk(A_t) = rk(A_t | b) = 3$

Per il teo. di Rouché - Capelli

Per $t \neq 3$ $\quad rk(A) = 3 = rk(A|b)$

$\Rightarrow \exists$ soluzione

Inoltre la soluzione è unica poiché
$3 =$ numero incognite

Per $t=3$ $\quad rk(A) = 2$

$$(A|b) = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 & 0 \\ 3 & 3 & 0 & 6 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

colonna $b = 2 \cdot$ (colonna 1) $\Rightarrow rk(A|b) = rk(A)$

Pertanto per $t=3$ $\quad \exists$ SOLUZIONE
&
$\dim \{\text{SOLUZIONI}\} = \dim(\text{Ker}) = 1$

iii) $W = \{-x_1 + x_2 + x_3 = 0\} \subset \mathbb{R}^3$

$\dim(W) = 3 - 1 = 2$

QUINDI $\quad W \oplus \text{Ker}(\mathcal{L}_{A_t}) = \mathbb{R}^3$

se $\dim(\text{Ker}(\mathcal{L}_{A_t})) = 1$

Dobbiamo verificare la condizione

$$\operatorname{Ker}(f_{A_t}) \cap W = \{0_V\}$$

Per $t=3$

$t=3$:
$$\operatorname{Ker}(f_{A_3}) = \begin{cases} 3x_2 + 3x_3 = 0 \\ 3x_1 + 3x_2 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

$$= \left\{ t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$\operatorname{Ker}(f_{A_3}) \cap W \iff \begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 = t \\ x_2 = -t \\ x_3 = t \end{cases}$$

$$\iff -t - t + t = 0 \iff t = 0$$

Conclusione: Per $t=3$ $\operatorname{Ker}(f_{A_3}) \cap W = \{0_V\}$

QUINDI $\operatorname{Ker}(f_{A_3}) \oplus W = \mathbb{R}^3$

3 $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che
lineare

$$Im(f) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \quad , \quad Ker(f) \subset Im(f)$$

$$\dim(Im(f)) = 2 \implies \dim(Ker(f)) = 3-2 = \underline{1}$$

Possiamo scegliere ad esempio $Ker(f) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$

Proviamo con la matrice $A_{3\times3}$ t.c.

colonna $1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$

colonna $2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ -3 & 1 & b \\ 1 & 1 & c \end{pmatrix}$$

$$Ker(f) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \iff A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{cases} 1+1+a = 0 \\ -3+1+b = 0 \\ 1+1+c = 0 \end{cases} \qquad \begin{matrix} a = -2 \\ b = 2 \\ c = -2 \end{matrix}$$

<u>conclusione</u>:
una possibile f è associata alla matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

4 $$A = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 9 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

i) $$P_A(\lambda) = \det\left(A - \lambda Id\right) = \det\begin{pmatrix} -3-\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & -3 & 9 \\ 0 & 0 & 3-\lambda & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -\lambda \end{pmatrix}$$

$$= (-3-\lambda)\cdot \det\begin{pmatrix} -\lambda & -3 & 9 \\ 0 & 3-\lambda & 0 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{pmatrix} = (-3-\lambda)\cdot(3-\lambda)\cdot\det\begin{pmatrix} -\lambda & 9 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix}$$

$$= (-3-\lambda)(3-\lambda)\cdot(\lambda^2-9) = (3-\lambda)^2\cdot(-3-\lambda)^2$$

autovalori : 3 $\quad m.a. = 2$

-3 $\quad m.a. = 2$

$$m.g.(3) = \dim\left(\operatorname{Ker}\left(A - 3\,Id\right)\right)$$

$$A - 3\,Id = \begin{pmatrix} -6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -3 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \end{pmatrix} \qquad rk = 2 \;\Rightarrow\; \dim(\operatorname{Ker}) = 4-2$$

$$\Rightarrow m.g.(3) = 2$$

$$m.g.(-3) = \dim(\mathrm{Ker}(A + 3\,Id))$$

$$A + 3\,Id = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & 9 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad rK = 2 \Rightarrow \dim(\mathrm{Ker}) = 4-2$$

$$\Rightarrow \quad m.g.(-3) = 2$$

iii) $P_A(\lambda)$ ha tutte le radici $\in \mathbb{R} \Rightarrow A$ è triang.^{le}

Autovalori: $3, -3$

$$\left.\begin{array}{l} m.a.(3) = 2 = m.g.(3) \\ m.a.(-3) = 2 = m.g.(-3) \end{array}\right\} \Rightarrow A \text{ è diag.}^{le}$$

ii) $$V_3 = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$V_{-3} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$