Esame di ALGEBRA LINEARE - anno accademico 2021/2022
Corso di laurea in Ingegneria gestionale
Prova scritta del 15/02/2022
TEMPO A DISPOSIZIONE: 120 minuti

(Cognome) ____ (Nome) MARCO (Numero di matricola) ____

PRIMA PARTE

PUNTEGGIO : risposta mancante = 0 ; risposta esatta = +1 risposta sbagliata = -1
calcoli e spiegazioni non sono richiesti

- $z = 1 + i \implies z^6 =$ $\boxed{-8i}$
- $z = 4 + 2i,\ w = 2 + 2i \implies Re(z \cdot w) =$ $\boxed{4}$
- Dati W e Z i seguenti sottospazi di $\mathbb{R}^3$:

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \ : \ x_1 - x_2 + x_3 = 0 \right\},\ Z = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle .$$

- $\mathbb{R}^3 = W \bigoplus Z$ vero ~~falso~~

Determinare una base di W: $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$

- $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & -4 \end{pmatrix} \implies \mathrm{rg}(A) =$ $\boxed{2}$ $\dim(Ker(l_A)) =$ $\boxed{3}$
- $\det \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} =$ $\boxed{8}$
- $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \implies m.a.(1) =$ $\boxed{3}$
- Data $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ determinare il coefficiente di posto $(1,3)$ della matrice A^{-1} : $\boxed{\frac{1}{6}}$
- Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ lineare. Sapendo che $f\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $f\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, allora $f\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}$

15 - 2 - 2022

Traccia soluzioni

(1) $\begin{cases} (z+i)^4 = 4(\bar{z}-i)^2 \\ |e^z| = e \end{cases}$

2ª eq: $|e^z| = |e^{x+iy}| = |e^x \cdot e^{iy}| =$

$\underbrace{|e^x|}_{>0} \cdot \underbrace{|e^{iy}|}_{=1} = e^x$

Quindi $|e^z| = e \iff e^x = e$

$\iff \begin{cases} x = 1 \\ y \text{ qualsiasi} \end{cases}$

1ª eq. $w = z+i$ $\quad z = w - i$

$\bar{w} = \bar{z} - i$

$w^4 = 4 \cdot \bar{w}^2$

$w = \rho \cdot e^{i\vartheta}$

eq $\iff \rho^4 \cdot e^{i4\vartheta} = 4 \cdot \rho^2 \cdot e^{-i2\vartheta}$

$\iff \begin{cases} \rho^4 = 4\rho^2, & \rho \in \mathbb{R}^+ \\ 4\vartheta = -2\vartheta + 2k\pi, & k \in \mathbb{Z} \end{cases}$

SOLUZIONI DISTINTE

$\rho = 0 \iff w = 0$

$$\begin{cases} \rho = 2 \\ \vartheta = \dfrac{2k\pi}{6} \qquad k = 0, 1, \dots, 5 \end{cases}$$

$w_6 = 0 \quad \to \quad z_6 = -i$

$w_0 = 2 \quad \to \quad z_0 = 2 - i$

$w_1 = 1 + i\sqrt{3} \quad \to \quad z_1 = 1 + i(\sqrt{3} - 1)$

$w_2 = -1 + i\sqrt{3} \quad \to \quad z_2 = -1 + i(\sqrt{3} - 1)$

$w_3 = -2 \quad \to \quad z_3 = -2 - i$

$w_4 = -1 - i\sqrt{3} \quad \to \quad z_4 = -1 + i(-\sqrt{3} - 1)$

$w_5 = 1 - i\sqrt{3} \quad \to \quad z_5 = 1 + i(-\sqrt{3} - 1)$

CONCLUSIONE:

SOLUZIONE sisteme (cerco le z_i t.c. $\mathrm{Re}(z_i) = 1$)

$z_1, \; z_5$

2 $A_t = \begin{pmatrix} t & 1 & 3 \\ 0 & t & 2 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ 3×3

$\det(A_t) = 4t^2 - 8t + 4 = 4 \cdot (t-1)^2$

$\det = 0 \iff t = 1$

i) • $t \neq 1$ $\begin{cases} rg = 3 \\ \dim(\ker) = 0 \end{cases}$

• $t = 1$ $A_{t=1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ha $\det \neq 0$

$\Rightarrow \begin{cases} rg = 2 \\ \dim(\ker) = 3 - 2 = 1 \end{cases}$

ii) $t \neq 1$ $\exists!$ SOLUZIONE

$t = 1$ $rg(A_t) = 2$

$rg(A_t | b) = 2$ $b = col.(1) + col.(2)$

$\Rightarrow \exists \infty$ SOLUZIONI

iii) $A_{t=1} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 = 2 \\ x_2 + 2x_3 = 1 \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 = 3 \end{cases}$$

SOLUZIONE: $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

3) $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

$f \leftrightarrow A$ matrice 3×3

$Im(f) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle \Rightarrow rg(A) = 1$ & colonne di A multiple di $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$Ker(f) = \{ x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \}$

$\Downarrow$

righe di A multiple di $(1 \quad 2 \quad 1)$

CONCLUSIONE:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & -1 \\ 2 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

4

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$P_A(\lambda) = (2-\lambda)\cdot(\lambda^2+1)$$

λ^2+1 non ha radici $\in \mathbb{R}$

$\Rightarrow$ unica radice reale di $P_A(\lambda)$ è $\lambda_0 = 2$

SE CONSIDERIAMO $A \in Mat(3\times3; \mathbb{R})$

A non è triangolarizzabile

e quindi non è diagonalizzabile

<u>OSS</u>. SE CONSIDERIAMO $A \in Mat(3\times3; \mathbb{C})$

autovalori di A sono $\begin{cases} 2 & m.a. = 1 \\ +i & m.a. = 1 \\ -i & m.a. = 1 \end{cases}$

Quindi in $Mat(3\times3; \mathbb{C})$ è diagonalizzabile

(ma a lezione non è stato fatto)

AUTOVALORI reali: $\lambda_0 = 2$

AUTOVETTORI reali: $\operatorname{Ker}(A - 2\,\mathrm{Id}) = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$

(iv) $A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

(v) La matrice A^2 è in forma diagonale

Quindi è ovviamente diagonalizzabile

(e triangolarizzabile)