Esame di ALGEBRA LINEARE - anno accademico 2021/2022
Corso di laurea in Ingegneria gestionale
Prova scritta del 25/01/2022
TEMPO A DISPOSIZIONE: 120 minuti

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

PRIMA PARTE

PUNTEGGIO : risposta mancante = 0 ; risposta esatta = +1 risposta sbagliata = -1

calcoli e spiegazioni non sono richiesti

- $z = i \implies z^{61} = \boxed{i}$ • $z = 3 - 2i,\ w = 2 + 2i \implies Im(z \cdot w) = \boxed{2}$

- Dati W e Z i seguenti sottospazi di $\mathbb{R}^3$:

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \ : \ x_1 - 3x_2 + x_3 = 0 \right\},\ Z = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle .$$

Determinare una base di $W \cap Z$: $\boxed{\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}}$

- $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & -4 & -4 \end{pmatrix} \implies \mathrm{rg}(A) = \boxed{2} \qquad \dim(Ker(l_A)) = \boxed{3}$

- $\det \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \boxed{24}$ • $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \implies m.a.(1) = \boxed{3}$

- Il vettore $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ è autovettore dell'applicazione lineare associata alla matrice (barrare la matrice giusta)

$$A_1 = \cancel{\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}} \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 6 & 0 \end{pmatrix} \qquad A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad A_4 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \implies A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{2}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$

- Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ lineare. Sapendo che $f \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $f \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$, allora $f \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix}$

25 / 1 / 2022

TRACCIA SOL

(1)
$$\begin{cases} (z-i)^4 = -64 \\ e^{i\pi z} = e^{\pi} \end{cases}$$

i) $z - i = w \qquad w = \rho \cdot e^{i\vartheta} \quad \Rightarrow \quad w^4 = -64$

$$\Updownarrow$$

$$\rho^4 \cdot e^{i4\vartheta} = 64 \cdot e^{i\pi}$$

$$\begin{cases} \rho^4 = 64 \\ 4\vartheta = \pi + 2k\pi, \ k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

SOL. DISTINTE :
$$\begin{cases} \rho = \sqrt[4]{64} = 2\cdot\sqrt{2} \\ \vartheta = \dfrac{\pi + 2k\pi}{4} \qquad k=0,1,2,3 \end{cases}$$

$w_0 = 2+2i \quad \to \quad z_0 = 2+3i$

$w_1 = -2+2i \quad \to \quad z_1 = -2+3i$

$w_2 = -2-2i \quad \to \quad z_2 = -2-i$

$w_3 = 2-2i \quad \to \quad z_3 = 2-i$

ii) $e^{i\pi z} = e^{\pi} \iff i\pi z = \pi + i2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$

$\iff z = (i)^{-1} + 2k$

$= 2k - i, \quad k \in \mathbb{Z}$

SOL. SISTEMA: z_2, z_3

2 $\quad A_t = \begin{pmatrix} t & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 0 & -t & -1 \end{pmatrix} \quad 3 \times 3$

$\det(A_t) = t(t-4)$

$\det = 0 \iff t = \begin{cases} 0 \\ 4 \end{cases}$

i

- $t \neq 0, 4 \quad rk = 3, \quad \dim \ker = 0$
- $t = 0, 4 \quad rk = 2, \quad \dim \ker = 1$

$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ ha $\det \neq 0 \quad \forall t$

ii $\quad A_t \quad 3 \times 3, \quad (A_t | b) \quad 3 \times 4$

- $t \neq 0, 4 \quad rk(A) = rk(A|b) = 3$

$\Rightarrow \exists!$ sol.

~~• caso $rk(A) = 2 \neq 3 = rk(A|b)$~~

$\boxed{b = 2 \cdot \text{colonne } 3}$ ~~$\nexists$ sol.~~

- $t = 4, 0 \quad rk(A) = 2 = rk(A|b) \Rightarrow \exists \infty$ sol.

2 iii $A_{(t=4)} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ 3

$$SOL: \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} \right\}$$

SPAZIO AFFINE di dim = 2

3 $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ $rk(f) = 1$

$Im = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\rangle$

$ker = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$

A 2×2 $A = \begin{pmatrix} t & s \\ 3t & 3s \end{pmatrix}$

Poniamo $t = 1$

$$\begin{pmatrix} 1 & s \\ 3 & 3s \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 + s = 0 \\ 3 + 3s = 0 \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}$$

4) $A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

i) $P_A(\lambda) = \ldots = -\lambda^3$

0 autovalore m.a. $(0) = 3$

m.g. $(0) = \dim(\mathrm{Ker}(A)) = 3 - \mathrm{rg}(A) = 1$

poiché $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ha $\det \neq 0$

ii) AUTOSPAZIO

$V_0 = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle$

iii) A è triang.^{le} ; A non è diag.^{le}

iv) $A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

v autovettore per $A \iff v = t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$A^2 \cdot v = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ t \\ -t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ v autovettore per A^2 relativo a $\lambda = 0$