Corso di laurea in Ingegneria Gestionale/ Chimica
Esame di ALGEBRA LINEARE - anno accademico 2018/2019

Prova scritta del 8 /1/2019

TEMPO A DISPOSIZIONE: 120 minuti

	MARCO	
(Cognome)	(Nome)	(Numero di matricola)

PRIMA PARTE

PUNTEGGIO : risposta mancante = 0 ; risposta esatta = +1 risposta sbagliata = -1

calcoli e spiegazioni non sono richiesti

- $z = \sqrt{3} + i \implies z^3 =$ $\boxed{8i}$

Dati W e Z i seguenti sottospazi di $\mathbb{R}^3$:

$$W = \{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \ : \ x_1 - x_2 - x_3 = 0 \} \ , \ Z = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle \ . \text{ Allora}$$

- $\dim(W + Z) =$ $\boxed{3}$ • $\dim(W \cap Z) =$ $\boxed{1}$

- $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \implies \text{rg}(A) =$ $\boxed{3}$ $\dim(Ker(l_A)) =$ $\boxed{0}$

- $\det \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 5 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} =$ $\boxed{5}$ • $A= \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \implies$ A è diagonalizzabile | vero | ~~falso~~ |

- Il vettore $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ è autovettore dell'applicazione lineare associata alla matrice (barrare la matrice giusta)

$$\cancel{A_1 = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}} \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \qquad A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} \qquad A_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

- $A= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \implies \mathcal{L}_A$ è iniettiva | vero | ~~falso~~ |

- $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \implies A^{-1} =$ $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & -2 \end{pmatrix}$

8 - 1 - 19

FRACCIA SOL.

1

$$\begin{cases} z^3 = -\dfrac{\pi}{2}^2 \cdot \bar{z} \\ e^{4z} = e^{2\pi} \end{cases}$$

I eq:

$$\rho^3 \cdot e^{i3\vartheta} = \frac{\pi}{2}^2 \cdot e^{i\pi} \cdot \rho \cdot e^{-i\vartheta}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \rho^3 = \dfrac{\pi}{2}^2 \rho \\ 3\vartheta = -\vartheta + \pi + 2k\pi \qquad k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

sol. distinte

$z_0 = 0$

$z_1 = \frac{\pi}{2} + i\,\frac{\pi}{2}$

$z_2 = -\frac{\pi}{2} + i\,\frac{\pi}{2}$

$z_3 = -\frac{\pi}{2} - i\,\frac{\pi}{2}$

$z_4 = \frac{\pi}{2} - i\,\frac{\pi}{2}$

SOL. SISTEMA

z_1

z_4

II eq.

$$4z = 2\pi + i\,2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow z = \frac{\pi}{2} + i\,\frac{k\pi}{2}$$

2 $A_t = \begin{pmatrix} 1 & t & 7 \\ t & t & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

i) $\det(A_t) = -3t^2 - 3t$

$t \neq 0, -1$ $\quad$ $rg(A_t) = 3$

$\dim(\ker) = 0$

$M = \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ ha $\det \neq 0$

$t = 0, 1$ $\quad$ $rg(A_t) = 2$

$\dim(\ker) = 1$

ii) $t \neq 0, -1$ $\quad \exists!$ sol

$t = 0$

$b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} =$ col. 1 : $\begin{cases} rg(A) = rg(A|b) = 2 \\ \exists \infty \text{ sol.} \end{cases}$

$t = -1$ $\quad$ $rg(A) = 2$

$rg(A|b) = 3$ $\Rightarrow$ non $\exists$ sol.

iii) $W = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \subset \mathbb{R}^3$

$\dim(W) = 1$

$W \oplus \operatorname{Im}(\mathcal{L}_{A_t}) = \mathbb{R}^3 \iff \begin{cases} \text{i. } \dim(W) + \dim(\operatorname{Im}) = 3 \\ \text{ii. } W \cap \operatorname{Im}(\mathcal{L}_{A_t}) = \{0_V\} \end{cases}$

i) $\iff \operatorname{rg}(A_t) = 2$

ii $\iff$ Posto $\{v_1, v_2\}$ BASE di $\operatorname{Im}(\mathcal{L}_{A_t})$

si ha $\left\{ v_1, v_2, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ base $\mathbb{R}^3$

$\iff \det\left(v_1, v_2, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \neq 0$

$t = 0, -1$ sono verificate entrambe le condizioni

3

4

$$f\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}=\text{ colonne 2 di } A$$

$$f\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}=f\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}-f\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}=\text{ colonne 3 di } A$$

$$f\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}=f\left(\frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}=\text{ colonne 1 di } A$$

$$A=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&0\\2&2&-1\end{pmatrix}$$

4

5

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

i) $p_A(\lambda) = -\lambda^3 \cdot (\lambda - 1)$

AUTOVALORI: $\lambda_0 = 0$ $\quad$ m.a. $= 3$ $\quad$ m.g. $= 2$

$\lambda_1 = 1$ $\quad$ m.a. $= 1$ $\quad$ m.g. $= 1$

iii) A è triangolarizzabile (radici $\in \mathbb{R}$)

A non è diagonalizzabile ($\text{m.a}(0) = 3 \neq 2 = \text{m.g.}(0)$)

ii) $V_0 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$

$V_1 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$