Esame di ALGEBRA LINEARE - anno accademico 2015/2016

Corso di laurea in Ingegneria $\boxed{}$

Prova scritta del 21/12/2015

TEMPO A DISPOSIZIONE: 120 minuti

(Cognome) ______ (Nome) MARCO ______ (Numero di matricola) ______

PRIMA PARTE

PUNTEGGIO : risposta mancante = 0 ; risposta esatta = +1 risposta sbagliata = -1

calcoli e spiegazioni non sono richiesti

- Sia $z = -1 + i$. Scrivere z nella rappresentazione trigonometrica $z = \varrho \cdot e^{i\vartheta}$: $z = \boxed{\sqrt{2} \cdot e^{i \frac{3}{4}\pi}}$

- $z = -1 + i \implies z^4 = \boxed{-4}$

- Dati W e Z i seguenti sottospazi di $\mathbb{R}^3$:

$$W = \{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \ : \ 2x_1 + 2x_2 + x_3 = 0\} , \ Z = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \rangle \implies \dim(W \cap Z) = \boxed{1}$$

Determinare una base di W:

$$\boxed{\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}}$$

- $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \implies \mathrm{rg}(A) = \boxed{3} \quad \dim(Ker(l_A)) = \boxed{3}$

- $\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 5 & 2 \end{pmatrix} = \boxed{6}$

- $A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \implies m.g.(-2) = \boxed{3}$

- Data $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ determinare il coefficiente di posto $(1, 2)$ della matrice A^{-1} : $\boxed{-4}$

- Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ lineare. Sapendo che $f \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $f \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$, allora $f \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$

21-12-2015

TRACCIA SOL

1

$$\begin{cases} z^4 = 9\bar{z}^2 \\ |z+4| \leq 1 \end{cases}$$

I eq. $z = \rho \cdot e^{i\vartheta}$

$z^4 = \rho^4 \cdot e^{i4\vartheta}$

$\bar{z}^2 = \rho^2 \cdot e^{-i2\vartheta}$

$$z^4 = 9\bar{z}^2 \iff \begin{cases} \rho^4 = \rho^2 \cdot 9, & \rho \in \mathbb{R}^+ \\ 4\vartheta = -2\vartheta + 2k\pi, & k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

sol. distinte

$\rho = 0 \iff z = 0$; $\begin{cases} \rho = 3 \\ \vartheta = \dfrac{2k\pi}{6} & k = 0, 1, \dots, 5 \end{cases}$

SOL:

$z_6 = 0$

$z_0 = 3$

$z_1 = \frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$

$z_2 = -\frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$

$z_3 = -3$

$z_4 = -\frac{3}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$

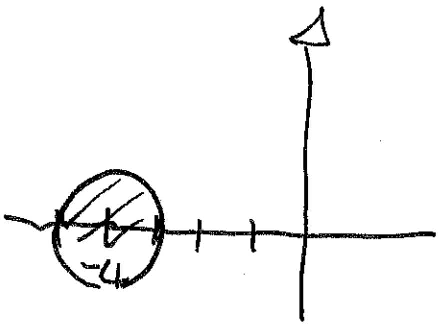
$z_5 = \frac{3}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$

II disep: $|z+4| \leq 1$ (2)

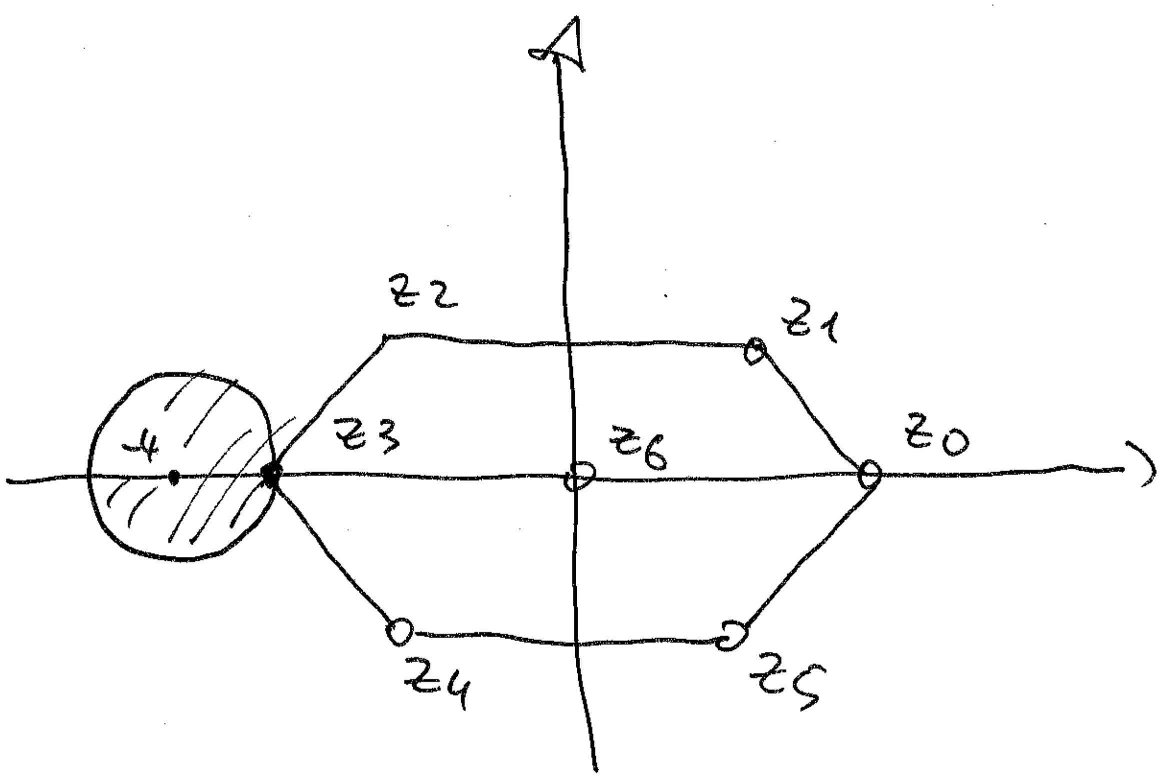
$\Updownarrow$

cerchio di centro $z_0 = -4 + i0$

raggio $= 1$



SOL. SISTEMA : $\underline{z_3 = -3}$



② $A_t = \begin{pmatrix} 1 & t & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ t & 3 & 5 \end{pmatrix}$ ③

$\det(A_t) = -t^2 - 2t + 8$

$\det = 0 \iff t = \begin{cases} +2 \\ -4 \end{cases}$

Quindi

se $t \neq -4, 2$ $\det \neq 0$

$\Rightarrow \begin{cases} rg = 3 \\ \dim(\mathrm{Ker}(\mathcal{L}_A)) = 0 \end{cases}$

$t = -4, 2$
$\det = 0$

$M = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$
ha $\det \neq 0$

$\Downarrow$

$\begin{cases} rg = 2 \\ \dim(\mathrm{Ker}(\mathcal{L}_A)) = 3 - 2 = 1 \end{cases}$

ii) $A_t \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}$

$\boxed{(A_t \vdots b) \text{ matrice } 3\times 4}$

Per $t \neq 2, -4$

$rg(A_t) = 3 \leq rg(A_t \vdots b) \leq 3$

$\Rightarrow \exists$ (unica) soluzione

Per $t = 2$

$b = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} = 2 \cdot (\text{colonna } 2)$

$\Rightarrow rg(A) = rg(A \vdots b)$

$\Rightarrow \exists\ (\infty)$ SOLUZIONI

Per $t = -4$

$\left.\begin{array}{l} rg(A) = 2 \\ rg(A \vdots b) = 3 \end{array}\right\} \Rightarrow$ non $\exists$ sol.

$\exists$ M 3x3 con det $\neq 0$

iii) Per $t=2$

$rg(A)=2$

colonne 1, colonne 2 lin. IND.

$\Rightarrow \quad Im(\mathcal{L}_A) = \left\langle \begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix} \right\rangle$

$Ker(\mathcal{L}_A) \leftrightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 0 \\ \qquad x_2 - x_3 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 0 \end{cases}$

$sol. = \left\{ t \cdot \begin{pmatrix}-4\\1\\1\end{pmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\} = \left\langle \begin{pmatrix}-4\\1\\1\end{pmatrix} \right\rangle$

I vettori $\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-4\\1\\1\end{pmatrix}$

Sono lin. IND. (e.g. $\det\begin{pmatrix}1 & 2 & -4\\0 & 1 & 1\\2 & 3 & 1\end{pmatrix} \neq 0$)

$\Rightarrow \quad \mathbb{R}^3 = Ker(\mathcal{L}_A) \oplus Im(\mathcal{L}_A)$

3 $\mathrm{Im}(f) = \{ x_1 - x_2 - x_3 = 0 \}$

$= \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle$

$\mathrm{Ker}(f) = \langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle \Rightarrow f\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Ma $f\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} =$ 2ª colonna della matrice A associata ad f rispetto alla base canonica.

Possiamo scegliere $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} =$ 1° colonna

$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} =$ 3ª colonna

conclusione:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

4

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$P_A(\lambda) = (1-\lambda)^2 \cdot (4-\lambda) \cdot (-\lambda)$$

AUTOVALORI :

$\lambda_1 = 0$ m.e. = 1 m.g. = 1

$\lambda_2 = 1$ m.e. = 2 m.g. = 2

$\lambda_3 = 4$ m.e. = 1 m.g. = 1

(iii) $\forall \lambda_i \in \mathbb{R}$

$\forall \lambda_i$ m.a.(λ_i) = m.g.(λ_i) $\Rightarrow$ A è digonalizzabile

(ii) AUTOVETTORI

AUTOSPAZIO relativo a $\lambda_1 = 0$ $= V_1 = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$

AUTOSPAZIO relativo a $\lambda_2 = 1$ $= V_2 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$

AUTOSPAZIO relativo a $\lambda_3 = 4$ $= V_3 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$