Corso di laurea in Ingegneria Gestionale

Esame di ALGEBRA LINEARE - anno accademico 2024/2025

Prova scritta del 24/01/2025

TEMPO A DISPOSIZIONE: 120 minuti

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

PRIMA PARTE

PUNTEGGIO : risposta mancante = 0 ; risposta esatta = +1 risposta sbagliata = -1

calcoli e spiegazioni non sono richiesti

- $z = 2 + i5,\ w = 4 + i3 \Rightarrow Re(z \cdot w) =$ $\boxed{}$

- Sia $z = -i4$. Scrivere z nella rappresentazione trigonometrica $z = \varrho \cdot e^{i\vartheta}$: $z =$ $\boxed{}$

- Dati W e Z i seguenti sottospazi di $\mathbb{R}^3$:

$$W = \{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \ : \ x_1 + 3x_2 + x_3 = 0\},\ Z = \langle \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} \rangle. \quad \text{Allora} \quad \mathbb{R}^3 = W \bigoplus Z$$

vero	falso

- Determinare una base di W

$\boxed{}$

- $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} \implies \dim(Ker(l_A)) =$ $\boxed{}$ $\qquad \text{rg}(A) =$ $\boxed{}$

- $\det \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 0 & 0 \end{pmatrix} =$ $\boxed{}$

- $\begin{pmatrix} 2 & 5 & 5 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \implies m.a.(2) =$ $\boxed{}$

- Il vettore $\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ è autovettore dell'applicazione lineare associata alla matrice (barrare la matrice giusta)

$$A_1 = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad A_3 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \qquad A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \implies A^{-1} = \begin{pmatrix} & \\ & \end{pmatrix}$

- Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ lineare. Sapendo che $f\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix},\ f\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 4 \end{pmatrix}$, allora $f\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \end{pmatrix}$

SECONDA PARTE

I risultati devono essere giustificati attraverso calcoli e spiegazioni

Esercizio 1. [punteggio: 0-5] Si determinino le soluzioni complesse del seguente sistema:

$$\begin{cases} (z+3i)^5 = 4(z+3i) \\ |z| \leq 3 \end{cases}$$

Esercizio 2. [punteggio: 0-6] Al variare del parametro reale t sia $\mathcal{L}_{A_t} : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare associata alla matrice

$$A_t = \begin{pmatrix} 0 & 2 & t \\ 1 & t & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

(i) Determinare, al variare di $t \in \mathbb{R}$, $\dim(Ker(\mathcal{L}_{A_t}))$ e $\dim(Im(\mathcal{L}_{A_t}))$.

(ii) Determinare i valori di $t \in \mathbb{R}$ per cui esiste almeno una soluzione del sistema $\mathcal{L}_{A_t}(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$

(iii) Posto $t = -1$, determinare l'equazione intrinseca di $(Im(\mathcal{L}_{A_t}))$.

Esercizio 3 **[punteggio: 0-3]** Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un'applicazione lineare tale che :

$$Im(f) = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle \ , \ Ker(f) = \langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$$

Si determini una matrice $A \in \mathcal{M}at(3 \times 3; \mathbb{R})$ tale che $f = \mathcal{L}_A$.

Esercizio 4. [punteggio: 0-6] Si consideri la matrice A

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(i) Si determinino gli autovalori di A specificandone la molteplicità algebrica e geometrica.
(ii) Si determinino gli autovettori di A.
(iii) Si dica se A è triangolarizzabile e/o diagonalizzabile.