Corso di laurea in Ingegneria Gestionale
Esame di ALGEBRA LINEARE - anno accademico 2024/2025

Prova scritta del 8/1/2025

TEMPO A DISPOSIZIONE: 120 minuti

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

PRIMA PARTE

PUNTEGGIO : risposta mancante = 0 ; risposta esatta = +1 risposta sbagliata = -1

calcoli e spiegazioni non sono richiesti

- Sia $z = 4 \cdot e^{i\frac{2\pi}{3}}$. Scrivere z nella rappresentazione cartesiana $z = x + iy$: $z =$ $\boxed{}$

- $z = 2 + -i$, $w = 3 - 2i \quad \Rightarrow \quad Re(z \cdot w) =$ $\boxed{}$

Dati W e Z i seguenti sottospazi di $\mathbb{R}^3$:

$$W = \{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;:\; x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \} \;,\; Z = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \rangle \;.$$

- Determinare una base di $W \cap Z$

$\boxed{}$

- $A = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 1 & 1 \\ 4 & 5 & 1 & 1 \\ 4 & 5 & 1 & 1 \\ 4 & 5 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \dim(Ker(\mathcal{L}_A)) =$ $\boxed{}$ $\quad \mathrm{rg}(A) =$ $\boxed{}$

- $\det \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} =$ $\boxed{}$

- $A = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow A$ è diagonalizzabile

vero	falso

- $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} \end{pmatrix}$

- $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \;,\; B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \Longrightarrow \quad A \cdot B = \begin{pmatrix} \end{pmatrix}$

- Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ lineare. Sapendo che $f\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $f\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 7 \end{pmatrix}$, allora $\quad f\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \end{pmatrix}$

SECONDA PARTE

I risultati devono essere giustificati attraverso calcoli e spiegazioni

Esercizio 1. **[punteggio: 0-5]** Si determinino le soluzioni complesse del seguente sistema:

$$\begin{cases} z^3 = -8 \cdot |z| \cdot \overline{z} \\ |z - 4i| \leq |z| \end{cases}$$

Esercizio 2. [punteggio: 0-6]

Al variare del parametro reale t sia $\mathcal{L}_{A_t} : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare associata alla matrice

$$A_t = \begin{pmatrix} t & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & -t \end{pmatrix}$$

i) Determinare, al variare di $t \in \mathbb{R}$, $\dim(Ker(\mathcal{L}_{A_t}))$ e $\dim(Im(\mathcal{L}_{A_t}))$.

ii) Determinare i valori di $t \in \mathbb{R}$ per cui esiste almeno una soluzione del sistema $A_t \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$

(iii) Posto $t = 0$, dire se $\mathbb{R}^3 = Ker(\mathcal{L}_{A_t}) \bigoplus Im(\mathcal{L}_{A_t})$.

Esercizio 3. **[punteggio: 0-3]** Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un'applicazione lineare tale che :

$$Im(f) = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle \ , \ Ker(f) = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$$

Si determini una matrice $A \in \mathcal{M}at(3 \times 3; \mathbb{R})$ tale che $f = \mathcal{L}_A$.

Esercizio 4. [punteggio: 0-6]

Si consideri la matrice A

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

(i) Si determinino gli autovalori di A specificandone la molteplicità algebrica e geometrica.

(ii) Si determinino gli autovettori di A.

(iii) Dire se A è diagonalizzabile e/o triangolarizzabile.