Corso di laurea in Ingegneria Gestionale
Esame di ALGEBRA LINEARE - anno accademico 2024/2025

Prova scritta del 18/12/2024

TEMPO A DISPOSIZIONE: 120 minuti

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

PRIMA PARTE

PUNTEGGIO : risposta mancante = 0 ; risposta esatta = +1 risposta sbagliata = -1

calcoli e spiegazioni non sono richiesti

• Sia $z = -2 + i2\sqrt{3}$. Scrivere z nella rappresentazione trigonometrica $z = \varrho \cdot e^{i\vartheta}$: $z =$

• $z = -2 + i2\sqrt{3} \quad \Rightarrow \quad z^3 =$

Dati W e Z i seguenti sottospazi di $\mathbb{R}^3$:

$$W = \{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \quad : \quad x_1 - 2x_2 - x_3 = 0 \} \ , \ Z = \{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \quad : \quad x_2 - x_3 = 0 \} \ .$$

• $\mathbb{R}^3 = W \bigoplus Z$ | vero | falso |

• Determinare una base di $W \cap Z$

• $A = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 1 & 1 & 2 & 9 & 2 \\ 4 & 5 & 1 & 0 & 2 & 9 & 2 \\ 4 & 5 & 1 & 0 & 0 & 9 & 2 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \dim(Ker(\mathcal{L}_A)) = \qquad \mathrm{rg}(A) =$

• $\det \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} =$

• $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow A$ è diagonalizzabile | vero | falso |

• Data $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ determinare il coefficiente di posto $(1, 3)$ della matrice A^{-1} :

• $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \quad A \cdot B = \begin{pmatrix} & \\ & \end{pmatrix}$

• Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ lineare. Sapendo che $f \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $f \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 7 \end{pmatrix}$, allora $\quad f \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \\ \end{pmatrix}$

SECONDA PARTE

I risultati devono essere giustificati attraverso calcoli e spiegazioni

Esercizio 1. **[punteggio: 0-5]** Si determinino le soluzioni complesse del seguente sistema:

$$\begin{cases} z^6 = 16 \cdot \overline{z}^2 \\ |e^z| = e^2 \end{cases}$$

Esercizio 2. [punteggio: 0-6]

Al variare del parametro reale t sia $\mathcal{L}_{A_t} : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare associata alla matrice

$$A_t = \begin{pmatrix} 0 & t & 3 \\ t & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

i) Determinare, al variare di $t \in \mathbb{R}$, $\dim(Ker(\mathcal{L}_{A_t}))$ e $\dim(Im(\mathcal{L}_{A_t}))$.

ii) Determinare i valori di $t \in \mathbb{R}$ per cui esiste almeno una soluzione del sistema $A_t \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}$

(iii) Dato il sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$,

$$W = \{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \quad : \quad -x_1 + x_2 + x_3 = 0 \}$$

determinare per quali valori di t si ha $\mathbb{R}^3 = Ker(\mathcal{L}_{A_t}) \bigoplus W$.

Esercizio 3. **[punteggio: 0-3]** Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un'applicazione lineare tale che :

$$Im(f) = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle \quad , \quad Ker(f) \subset Im(f)$$

Si determini una matrice $A \in \mathcal{M}at(3 \times 3; \mathbb{R})$ tale che $f = \mathcal{L}_A$.

Esercizio 4. [punteggio: 0-6]

Si consideri la matrice A

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 9 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(i) Si determinino gli autovalori di A specificandone la molteplicità algebrica e geometrica.

(ii) Si determinino gli autovettori di A.

(iii)Dire se A è diagonalizzabile e/o triangolarizzabile.