Corso di laurea in Ingegneria Gestionale
Esame di ALGEBRA LINEARE - anno accademico 2023/2024

Prova scritta del 13/02/2024
TEMPO A DISPOSIZIONE: 120 minuti

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

PRIMA PARTE

PUNTEGGIO : risposta mancante = 0 ; risposta esatta = +1 risposta sbagliata = -1

calcoli e spiegazioni non sono richiesti

• $i^{25} =$ ☐

• $z = 4 + i3\ ,\ w = 1 + i2 \implies Re(z \cdot w) =$ ☐

Siano W e Z i seguenti sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^3$:

$$W = \{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \quad : \quad x_1 + x_2 + x_3 = 0\}\ ,\ Z = \{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \quad : \quad x_2 - 3x_3 = 0\}\ .$$

• $dim(W + Z) =$ ☐

• Determinare una base di $W \cap Z$

☐

• $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \implies \dim(Ker(L_A)) =$ ☐ $\mathrm{rg}(A) =$ ☐

• $\det \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} =$ ☐

• $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \implies m.g.(2) =$ ☐

• Il vettore $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ è autovettore dell'applicazione lineare associata alla matrice (barrare la matrice giusta)

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad A_3 = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

• $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \implies A \cdot B = \begin{pmatrix} & \\ & \end{pmatrix}$

SECONDA PARTE

I risultati devono essere giustificati attraverso calcoli e spiegazioni

Esercizio 1. [punteggio: 0-6] Si determinino le soluzioni complesse del seguente sistema:

$$\begin{cases} (z+2)^4 = -64 \\ |e^z| = 1 \end{cases}$$

Esercizio 2. [punteggio: 0-6]

Al variare del parametro reale t sia $\mathcal{L}_{A_t} : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare associata alla matrice

$$A_t = \begin{pmatrix} 1 & 1 & t \\ t & 0 & t \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

(i) Determinare, al variare di $t \in \mathbb{R}$, $\dim(Ker(\mathcal{L}_{A_t}))$ e $\dim(Im(\mathcal{L}_{A_t}))$.

(ii) Determinare i valori di $t \in \mathbb{R}$ per cui esiste almeno una soluzione del sistema $A_t \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$

(iii) Posto $t = 2$, determinare tutte le soluzioni del sistema $A_t \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$

Esercizio 3. [punteggio: 0-3] Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un'applicazione lineare tale che

$$Im(f) = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle ; \quad Ker(f) = \langle \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$$

Si determini una matrice $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ tale che $f = \mathcal{L}_A$.

Esercizio 4. [punteggio: 0-6] Si consideri la matrice A

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

(i) Si determinino gli autovalori di A specificandone la molteplicità algebrica e geometrica.
(ii) Si determinino gli autovettori di A.
(iii) Si dica se A è triangolarizzabile e/o diagonalizzabile.