

Corso di laurea in Ingegneria Gestionale
Esame di ALGEBRA LINEARE - anno accademico 2021/2022

Prova scritta del 10 /1/2022
TEMPO A DISPOSIZIONE: 120 minuti

(Cognome)	(Nome)	(Numero di matricola)

PRIMA PARTE

PUNTEGGIO : risposta mancante = 0 ; risposta esatta = +1 risposta sbagliata = -1
calcoli e spiegazioni non sono richiesti

• Sia $z = 2 - i2\sqrt{3}$. Scrivere z nella rappresentazione trigonometrica $z = \rho \cdot e^{i\theta}$: $z =$

• Sia $z = 2 - i2\sqrt{3}$. Scrivere z^3 nella rappresentazione cartesiana : $z^3 =$

• Dati W e Z i seguenti sottospazi di \mathbb{R}^3 :

$W = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \right\}$, $Z = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\rangle$. Allora $\mathbb{R}^3 = W \oplus Z$ vero falso

• Determinare una base di W

• $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \implies \text{rg}(A) =$ $\dim(\text{Ker}(l_A)) =$

• $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$ • $A = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \implies A$ è diagonalizzabile vero falso

• $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \implies A^{-1} = \begin{pmatrix} & \\ & \end{pmatrix}$

• $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \implies A \cdot B = \begin{pmatrix} & \\ & \end{pmatrix}$

SECONDA PARTE

I risultati devono essere giustificati attraverso calcoli e spiegazioni

Esercizio 1. [punteggio: 0-6]

Si determinino le soluzioni complesse del seguente sistema:

$$\begin{cases} z^4 + 64i \cdot z = 0 \\ |z - 2| \leq |z| \end{cases}$$

Esercizio 2. [punteggio: 0-6]

Al variare del parametro reale t sia $\mathcal{L}_{A_t} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$ l'applicazione lineare associata alla matrice

$$A_t = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & 1 \\ t & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

(i) Determinare, al variare di $t \in \mathbb{R}$, $\dim(\text{Ker}(\mathcal{L}_{A_t}))$ e $\dim(\text{Im}(\mathcal{L}_{A_t}))$.

(ii) Determinare i valori di $t \in \mathbb{R}$ per cui esiste almeno una soluzione del sistema $\mathcal{L}_{A_t} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ t \end{pmatrix}$

(iii) Si consideri il seguente sottospazio di \mathbb{R}^4 : $W = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle$.

Determinare per quali valori di t si ha $\mathbb{R}^4 = W \oplus \text{Im}(\mathcal{L}_{A_t})$.

Esercizio 3. [punteggio: 0-3]

Sia $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ un'applicazione lineare tale che

$$\text{Im}(f) = \text{Ker}(f) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\rangle;$$

Si determini una matrice $A \in \text{Mat}(2 \times 2; \mathbb{R})$ tale che $f = \mathcal{L}_A$.

Esercizio 4. [punteggio: 0-6]

Si consideri la matrice A

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 3 & 3 & 3 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(i) Si determinino gli autovalori di A specificandone la molteplicità algebrica e geometrica.

(ii) Si determinino gli autovettori di A .

(iii) Si dica se A è triangolarizzabile e/o diagonalizzabile.