

SECONDA PARTE

I risultati devono essere giustificati attraverso calcoli e spiegazioni

Esercizio 1. [punteggio: 0-6] Si determinino le soluzioni complesse del seguente sistema:

$$\begin{cases} (z - i)^2 = -i \cdot (\bar{z} + i) \\ |z| > |z - 2i| \end{cases}$$

Esercizio 2. [punteggio: 0-6] Al variare del parametro reale t sia $\mathcal{L}_{A_t} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$ l'applicazione lineare associata alla matrice

$$A_t = \begin{pmatrix} t & 0 & -1 \\ 2 & t & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

(i) Determinare, al variare di $t \in \mathbb{R}$, $\dim(\text{Ker}(\mathcal{L}_{A_t}))$ e $\dim(\text{Im}(\mathcal{L}_{A_t}))$.

(ii) Determinare i valori di $t \in \mathbb{R}$ per cui esiste almeno una soluzione del sistema $\mathcal{L}_{A_t} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

(iii) Si consideri il seguente sottospazio di \mathbb{R}^4 : $W = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$.

Determinare per quali valori di t si ha $\mathbb{R}^4 = W \oplus \text{Im}(\mathcal{L}_{A_t})$.

Esercizio 3 [punteggio: 0-3] Sia $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ un'applicazione lineare tale che :

$$\text{Im}(f) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\rangle, \quad f^2 = 0$$

Si determini una matrice $A \in \text{Mat}(2 \times 2; \mathbb{R})$ tale che $f = \mathcal{L}_A$.

Esercizio 4. [punteggio: 0-6] Si consideri la matrice A

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & -3 & -1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- (i) Si determinino gli autovalori di A specificandone la molteplicità algebrica e geometrica.
- (ii) Si determinino gli autovettori di A .
- (iii) Si dica se A è triangolarizzabile e/o diagonalizzabile.