Esame di ALGEBRA LINEARE - anno accademico 2019/2020
Corso di laurea in Ingegneria Gestionale
Prova scritta del 19/12/2019
TEMPO A DISPOSIZIONE: 120 minuti

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

PRIMA PARTE

PUNTEGGIO : risposta mancante = 0 ; risposta esatta = +1 risposta sbagliata = -1
calcoli e spiegazioni non sono richiesti

- Sia $z = 1 + i\sqrt{3}$. Scrivere z nella rappresentazione trigonometrica $z = \varrho \cdot e^{i\vartheta}$: $z =$ $\boxed{}$

- $z = 1 + i\sqrt{3}$. Scrivere z^3 nella rappresentazione cartesiana: $z^3 =$ $\boxed{}$

- Dati W e Z i seguenti sottospazi di $\mathbb{R}^3$:

$$W = \{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \quad : \quad 2x_1 - x_2 - 3x_3 = 0\} \ , \ Z = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \ , \ \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle \ .$$

Determinare una base di $W \cap Z$

$\boxed{}$

- $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \implies \mathrm{rg}(A) = \boxed{} \qquad \dim(Ker(\mathcal{L}_A)) = \boxed{}$

- $\det \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -3 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \boxed{}$

- $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} \implies A$ è diagonalizzabile

vero	falso

- Le soluzioni del sistema $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ costituiscono uno spazio affine di dimensione $= \boxed{}$

- Data $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ determinare il coefficiente di posto $(2, 3)$ della matrice A^{-1} : $\boxed{}$

- Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ lineare. Sapendo che $f \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}$, $f \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \end{pmatrix}$, allora $f \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \end{pmatrix}$

SECONDA PARTE

I risultati devono essere giustificati attraverso calcoli e spiegazioni

Esercizio 1. [punteggio: 0-6] Si determinino le soluzioni complesse del seguente sistema:

$$\begin{cases} (z-4)^3 = -32 \cdot (\overline{z}-4) \\ e^{(\frac{\pi}{2}z)} = -e^{4\pi} \end{cases}$$

Esercizio 2. [punteggio: 0-6]

Al variare del parametro reale t sia $\mathcal{L}_{A_t} : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare associata alla matrice

$$A_t = \begin{pmatrix} 2 & t & t \\ t & 5 & -4 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

i) Determinare, al variare di $t \in \mathbb{R}$, $\dim(Ker(\mathcal{L}_{A_t}))$ e $\dim(Im(\mathcal{L}_{A_t}))$.

ii) Determinare i valori di $t \in \mathbb{R}$ per cui esiste almeno una soluzione del sistema $A_t \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$

(iii) Posto $t = 1$ determinare tutte le soluzioni del sistema $A_t \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$

Esercizio 3 [punteggio: 0-3] Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un'applicazione lineare tale che :

$$Im(f) = \{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;:\; x_1 - x_2 - x_3 = 0 \} \quad ; \quad Ker(f) = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle.$$

Si determini una matrice $A \in \mathcal{M}at(3 \times 3; \mathbb{R})$ tale che $f = \mathcal{L}_A$.

Esercizio 4. [punteggio: 0-6]

Si consideri la matrice A

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -3 & -4 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 3 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

(i) Si determinino gli autovalori di A specificandone la molteplicità algebrica e geometrica.
(ii) Si determinino gli autovettori di A.
(iii) Si dica se A è triangolarizzabile e/o diagonalizzabile.