Corso di laurea in Ingegneria Gestionale/ Chimica
Esame di ALGEBRA LINEARE - anno accademico 2018/2019

Prova scritta del 8 /1/2019

TEMPO A DISPOSIZIONE: 120 minuti

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

PRIMA PARTE

PUNTEGGIO : risposta mancante = 0 ; risposta esatta = +1 risposta sbagliata = -1
calcoli e spiegazioni non sono richiesti

- $z = \sqrt{3} + i \implies z^3 = \boxed{}$

Dati W e Z i seguenti sottospazi di $\mathbb{R}^3$:

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \ : \ x_1 - x_2 - x_3 = 0 \right\}, \ Z = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle. \text{ Allora}$$

- $\dim(W + Z) = \boxed{}$ • $\dim(W \cap Z) = \boxed{}$

- $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \implies \operatorname{rg}(A) = \boxed{} \quad \dim(Ker(l_A)) = \boxed{}$

- $\det \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 5 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \boxed{}$ • $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \implies A$ è diagonalizzabile | vero | falso |

- Il vettore $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ è autovettore dell'applicazione lineare associata alla matrice (barrare la matrice giusta)

$$A_1 = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \qquad A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} \qquad A_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

- $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \implies \mathcal{L}_A$ è iniettiva | vero | falso |

- $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \implies A^{-1} = \begin{pmatrix} & \\ & \end{pmatrix}$

SECONDA PARTE

I risultati devono essere giustificati attraverso calcoli e spiegazioni

Esercizio 1. [punteggio: 0-6] Si determinino le soluzioni complesse del seguente sistema:

$$\begin{cases} z^3 = -\frac{\pi^2}{2} \cdot \overline{z} \\ e^{4z} = e^{2\pi} \end{cases}$$

Esercizio 2. [punteggio: 0-6]

Al variare del parametro reale t sia $\mathcal{L}_{A_t} : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare associata alla matrice

$$A_t = \begin{pmatrix} 1 & t & 7 \\ t & t & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

i) Determinare, al variare di $t \in \mathbb{R}$, $\dim(Ker(\mathcal{L}_{A_t}))$ e $\dim(Im(\mathcal{L}_{A_t}))$.

ii) Determinare i valori di $t \in \mathbb{R}$ per cui esiste almeno una soluzione del sistema $A_t \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

(iii) Dato il sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$, $W = \langle \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$

determinare per quali valori di t si ha $\mathbb{R}^3 = Im(f_t) \bigoplus W$.

Esercizio 3. [punteggio: 0-3]

Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un'applicazione lineare tale che

$$f(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad , \quad f(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} \quad , \quad f(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$$

Si determini una matrice $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ tale che $f = \mathcal{L}_A$.

Esercizio 4. [punteggio: 0-6]

Si consideri la matrice A

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

(i) Si determinino gli autovalori di A specificandone la molteplicità algebrica e geometrica.

(ii) Si determinino gli autovettori di A.

(iii) Dire se A è diagonalizzabile.