Esame di ALGEBRA LINEARE - anno accademico 2016/2017

Corso di laurea in Ingegneria ☐

Prova scritta del 24/02/2017

TEMPO A DISPOSIZIONE: 120 minuti

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

PRIMA PARTE

PUNTEGGIO : risposta mancante = 0 ; risposta esatta = +1 risposta sbagliata = -1

calcoli e spiegazioni non sono richiesti

• Sia $z = 1+i$. Calcolare z^6 : ☐ • $z = 3+i$, $w = 3-2i$ $\Longrightarrow$ $Re(z \cdot w) =$ ☐

• Dati W e Z i seguenti sottospazi di $\mathbb{R}^3$:

$$W = \{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \quad : \quad x_1 + 2x_2 + x_3 = 0\} \ , \ Z = \{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \quad : \quad 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 0\}$$

(i) $\dim(W+Z) =$ ☐ (ii) Determinare una base di $W \cap Z$: ☐

• $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow$ $\mathrm{rg}(A) =$ ☐ $\dim(Ker(\mathcal{L}_A)) =$ ☐

• $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} =$ ☐ • $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \Longrightarrow m.g.(3) =$ ☐

• $A = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow$ A è diagonalizzabile (su $\mathbb{R}$)

vero	falso

• Data $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ allora A^{-1} : $\begin{pmatrix} \quad & \quad \\ \quad & \quad \end{pmatrix}$

• Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ lineare. Sapendo che $f \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $f \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix}$, allora $f \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \quad \end{pmatrix}$

SECONDA PARTE

I risultati devono essere giustificati attraverso calcoli e spiegazioni

Esercizio 1. [punteggio: 0-6] Si determinino le soluzioni complesse del seguente sistema:

$$\begin{cases} z^4 = -4\overline{z}^2 \\ |e^{iz}| = e \end{cases}$$

Esercizio 2. [punteggio: 0-6]

Al variare del parametro reale t sia $\mathcal{L}_{A_t} : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare associata alla matrice

$$A_t = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & t \\ t & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

i) Determinare, al variare di $t \in \mathbb{R}$, $\dim(Ker(\mathcal{L}_{A_t}))$ e $\dim(Im(\mathcal{L}_{A_t}))$.

ii) Determinare i valori di $t \in \mathbb{R}$ per cui esiste almeno una soluzione del sistema $A_t \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

(iii) Posto $t = 1$ determinare tutte le soluzioni del sistema $A_t \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Esercizio 3. [punteggio: 0-3] Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ un'applicazione lineare tale che

$$Ker(f) = Im(f) = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \rangle$$

Si determini una matrice $A \in \mathcal{M}at(2 \times 2; \mathbb{R})$ tale che $f = \mathcal{L}_A$.

Esercizio 4. [punteggio: 0-6] Si consideri la matrice A

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(i) Si determinino gli autovalori di A specificandone la molteplicità algebrica e geometrica.
(ii) Si determinino gli autovettori di A.
(iii) Si dica se A è triangolarizzabile e/o diagonalizzabile.