Esame di ALGEBRA LINEARE - anno accademico 2015/2016

Corso di laurea in Ingegneria ______

Prova scritta del 20/01/2016

TEMPO A DISPOSIZIONE: 120 minuti

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

PRIMA PARTE

PUNTEGGIO : risposta mancante = 0 ; risposta esatta = +1 risposta sbagliata = -1

calcoli e spiegazioni non sono richiesti

- Sia $z = 1 + 4i$. Scrivere nella forma cartesiana z^{-1} :

- Dati W e Z i seguenti sottospazi di $\mathbb{R}^3$:

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \quad : \quad x_1 + x_2 - x_3 = 0 \right\} , \; Z = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle . \quad \text{Allora} \quad \mathbb{R}^3 = W \bigoplus Z$$

vero	falso

- Determinare una base di $W \cap Z$

- $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 4 & 4 & 4 \\ 2 & 0 & 2 & 4 & 4 & 4 \end{pmatrix} \implies \dim(Ker(l_A)) = \qquad \operatorname{rg}(A) =$

- $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} =$

- $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \implies A$ è diagonalizzabile

vero	falso

- Il vettore $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ è autovettore dell'applicazione lineare associata alla matrice (barrare la matrice giusta)

$$A_1 = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 6 & 0 \end{pmatrix} \qquad A_3 = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad A_4 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

- $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \implies A^{-1} = \begin{pmatrix} & \\ & \end{pmatrix}$

- Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ lineare. Sapendo che $f \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $f \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$, allora $f \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \\ \end{pmatrix}$

SECONDA PARTE

I risultati devono essere giustificati attraverso calcoli e spiegazioni

Esercizio 1. [punteggio: 0-6]
Si determinino le soluzioni complesse del seguente sistema:

$$\begin{cases} (z-3)^4 = 4 \cdot (\overline{z}-3)^2 \\ |e^{iz}| < 1 \end{cases}$$

Esercizio 2. [punteggio: 0-6]

Sia $\mathcal{L}_A : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ l'applicazione lineare associata alla matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

i) Determinare, $\dim(Ker(\mathcal{L}_A))$ e $\dim(Im(\mathcal{L}_A))$.
ii) Al variare del parametro reale t, determinare i valori di $t \in \mathbb{R}$ per cui esiste

almeno una soluzione del sistema $\quad A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

(iii) Dimostrare che $Im(\mathcal{L}_A) = \{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \quad : \quad x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 0\}$

Esercizio 3. [punteggio: 0-3] Determinare un'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ tale che

$$Im(f) = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \rangle; \quad Ker(f) = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle$$

Si determini una matrice $A \in \mathcal{M}at(2 \times 3; \mathbb{R})$ tale che $f = \mathcal{L}_A$.

Esercizio 4. [punteggio: 0-6]
Si consideri la matrice A

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

(i) Si determinino gli autovalori di A specificandone la molteplicità algebrica e geometrica.
(ii) Si determinino gli autovettori di A.
(iii) Dire se A è triangolarizzabile e/o diagonalizzabile.
(iv) Calcolare A^2 e dire se A^2 è diagonalizzabile.

Esame di ALGEBRA LINEARE - anno accademico 2015/2016

Corso di laurea in Ingegneria ☐

Prova scritta del 20/01/2016

TEMPO A DISPOSIZIONE: 120 minuti

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

PRIMA PARTE

PUNTEGGIO : risposta mancante = 0 ; risposta esatta = +1 risposta sbagliata = -1

calcoli e spiegazioni non sono richiesti

- Sia $z = 2 + 4i$. Scrivere nella forma cartesiana z^{-1} :

- Dati W e Z i seguenti sottospazi di $\mathbb{R}^3$:

$$W = \{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \quad : \quad x_1 + x_2 - x_3 = 0 \} \ , \ Z = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle \ . \quad \text{Allora} \quad \mathbb{R}^3 = W + Z$$

vero | falso

- Determinare una base di $W \cap Z$

- $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 4 & 4 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \dim(Ker(l_A)) = \qquad \mathrm{rg}(A) =$

- $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} =$

- $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \Longrightarrow A$ è diagonalizzabile vero | falso

- Il vettore $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ è autovettore dell'applicazione lineare associata alla matrice (barrare la matrice giusta)

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -3 & -1 \end{pmatrix} \qquad A_3 = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad A_4 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} & \\ & \end{pmatrix}$

- Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ lineare. Sapendo che $f \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $f \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$, allora $\quad f \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \\ \end{pmatrix}$

SECONDA PARTE

I risultati devono essere giustificati attraverso calcoli e spiegazioni

Esercizio 1. [punteggio: 0-6]
Si determinino le soluzioni complesse del seguente sistema:

$$\begin{cases} (z-3i)^4 = 4\cdot(\overline{z}+3i)^2 \\ |e^z| < 1 \end{cases}$$

Esercizio 2. [punteggio: 0-6]

Sia $\mathcal{L}_A : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ l'applicazione lineare associata alla matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

i) Determinare, $\dim(Ker(\mathcal{L}_A))$ e $\dim(Im(\mathcal{L}_A))$.
ii) Al variare del parametro reale t, determinare i valori di $t \in \mathbb{R}$ per cui esiste

almeno una soluzione del sistema $\quad A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

(iii) Dimostrare che $Im(\mathcal{L}_A) = \{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \;\; : \;\; x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0\}$

Esercizio 3. [punteggio: 0-3] Determinare un'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ tale che

$$Im(f) = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \rangle; \quad Ker(f) = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle$$

Si determini una matrice $A \in \mathcal{M}at(2 \times 3; \mathbb{R})$ tale che $f = \mathcal{L}_A$.

Esercizio 4. [punteggio: 0-6]
Si consideri la matrice A

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

(i) Si determinino gli autovalori di A specificandone la molteplicità algebrica e geometrica.
(ii) Si determinino gli autovettori di A.
(iii) Dire se A è triangolarizzabile e/o diagonalizzabile.
(iv) Calcolare A^2 e dire se A^2 è diagonalizzabile.

Esame di ALGEBRA LINEARE - anno accademico 2015/2016

Corso di laurea in Ingegneria

Prova scritta del 20/01/2016

TEMPO A DISPOSIZIONE: 120 minuti

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

PRIMA PARTE

PUNTEGGIO : risposta mancante = 0 ; risposta esatta = +1 risposta sbagliata = -1

calcoli e spiegazioni non sono richiesti

- Sia $z = 3 + 4i$. Scrivere nella forma cartesiana z^{-1} :

- Dati W e Z i seguenti sottospazi di $\mathbb{R}^3$:

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \quad : \quad x_1 + x_2 - x_3 = 0 \right\},\ Z = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle. \quad \text{Allora} \quad \mathbb{R}^3 = W \bigoplus Z$$

vero	falso

- Determinare una base di $W \cap Z$

- $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 4 & 4 \\ 2 & 0 & 2 & 4 & 4 \end{pmatrix} \implies \dim(Ker(l_A)) =$ $\qquad$ $\mathrm{rg}(A) =$

- $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} =$

- $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \implies A$ è diagonalizzabile

vero	falso

- Il vettore $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ è autovettore dell'applicazione lineare associata alla matrice (barrare la matrice giusta)

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 6 & 0 \end{pmatrix} \qquad A_3 = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad A_4 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

- $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \implies A^{-1} = \begin{pmatrix} & \\ & \end{pmatrix}$

- Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ lineare. Sapendo che $f \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $f \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, allora $f \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \\ \end{pmatrix}$

SECONDA PARTE

I risultati devono essere giustificati attraverso calcoli e spiegazioni

Esercizio 1. [punteggio: 0-6]
Si determinino le soluzioni complesse del seguente sistema:

$$\begin{cases} (z-4)^4 = 4 \cdot (\overline{z}-4)^2 \\ |e^{iz}| > 1 \end{cases}$$

Esercizio 2. [punteggio: 0-6]

Sia $\mathcal{L}_A : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ l'applicazione lineare associata alla matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

i) Determinare, $\dim(Ker(\mathcal{L}_A))$ e $\dim(Im(\mathcal{L}_A))$.
ii) Al variare del parametro reale t, determinare i valori di $t \in \mathbb{R}$ per cui esiste

almeno una soluzione del sistema $\quad A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

(iii) Dimostrare che $Im(\mathcal{L}_A) = \{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \quad : \quad x_1 - x_2 - x_3 - x_4 = 0\}$

Esercizio 3. [punteggio: 0-3] Determinare un'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ tale che

$$Im(f) = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} \rangle; \quad Ker(f) = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle$$

Si determini una matrice $A \in \mathcal{M}at(2 \times 3; \mathbb{R})$ tale che $f = \mathcal{L}_A$.

Esercizio 4. [punteggio: 0-6]
Si consideri la matrice A

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(i) Si determinino gli autovalori di A specificandone la molteplicità algebrica e geometrica.
(ii) Si determinino gli autovettori di A.
(iii) Dire se A è triangolarizzabile e/o diagonalizzabile.
(iv) Calcolare A^2 e dire se A^2 è diagonalizzabile.

Esame di ALGEBRA LINEARE - anno accademico 2015/2016

Corso di laurea in Ingegneria ____

Prova scritta del 20/01/2016

TEMPO A DISPOSIZIONE: 120 minuti

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

PRIMA PARTE

PUNTEGGIO : risposta mancante = 0 ; risposta esatta = +1 risposta sbagliata = -1

calcoli e spiegazioni non sono richiesti

- Sia $z = 4 + 3i$. Scrivere nella forma cartesiana z^{-1} :

- Dati W e Z i seguenti sottospazi di $\mathbb{R}^3$:

$$W = \{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \quad : \quad x_1 + x_2 - x_3 = 0\} \ , \ Z = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle \ . \quad \text{Allora} \quad \mathbb{R}^3 = W + Z$$

vero	falso

- Determinare una base di $W \cap Z$

- $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 4 & 4 & 4 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \implies \quad \dim(Ker(l_A)) = \qquad \mathrm{rg}(A) =$

- $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} =$

- $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \implies A$ è diagonalizzabile

vero	falso

- Il vettore $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ è autovettore dell'applicazione lineare associata alla matrice (barrare la matrice giusta)

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad A_3 = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad A_4 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$$

- $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \implies A^{-1} = \begin{pmatrix} & \\ & \end{pmatrix}$

- Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ lineare. Sapendo che $f \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $f \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$, allora $f \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \\ \end{pmatrix}$

SECONDA PARTE

I risultati devono essere giustificati attraverso calcoli e spiegazioni

Esercizio 1. [punteggio: 0-6]
Si determinino le soluzioni complesse del seguente sistema:

$$\begin{cases} (z-4i)^4 = 4 \cdot (\overline{z}+4i)^2 \\ |e^z| > 1 \end{cases}$$

Esercizio 2. [punteggio: 0-6]

Sia $\mathcal{L}_A : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ l'applicazione lineare associata alla matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

i) Determinare, $\dim(Ker(\mathcal{L}_A))$ e $\dim(Im(\mathcal{L}_A))$.
ii) Al variare del parametro reale t, determinare i valori di $t \in \mathbb{R}$ per cui esiste

almeno una soluzione del sistema $\qquad A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

(iii) Dimostrare che $Im(\mathcal{L}_A) = \{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \ : \ x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0 \}$

Esercizio 3. [punteggio: 0-3] Determinare un'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ tale che

$$Im(f) = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} \rangle; \quad Ker(f) = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$$

Si determini una matrice $A \in \mathcal{M}at(2 \times 3; \mathbb{R})$ tale che $f = \mathcal{L}_A$.

Esercizio 4. [punteggio: 0-6]
Si consideri la matrice A

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

(i) Si determinino gli autovalori di A specificandone la molteplicità algebrica e geometrica.
(ii) Si determinino gli autovettori di A.
(iii) Dire se A è triangolarizzabile e/o diagonalizzabile.
(iv) Calcolare A^2 e dire se A^2 è diagonalizzabile.