Esame di ALGEBRA LINEARE - anno accademico 2015/2016

Corso di laurea in Ingegneria ______

Prova scritta del 21/12/2015

TEMPO A DISPOSIZIONE: 120 minuti

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

PRIMA PARTE

PUNTEGGIO : risposta mancante = 0 ; risposta esatta = +1 risposta sbagliata = -1

calcoli e spiegazioni non sono richiesti

- Sia $z = -1 + i$. Scrivere z nella rappresentazione trigonometrica $z = \varrho \cdot e^{i\vartheta}$: $z =$ ______

- $z = -1 + i \implies z^4 =$ ______

- Dati W e Z i seguenti sottospazi di $\mathbb{R}^3$:

$$W = \{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \; : \; 2x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \} \; , \; Z = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \rangle \implies \dim(W \cap Z) = \text{______}$$

Determinare una base di W:

______

- $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \implies \mathrm{rg}(A) =$ ______ $\dim(Ker(l_A)) =$ ______

- $\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 5 & 2 \end{pmatrix} =$ ______

- $A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \implies m.g.(-2) =$ ______

- Data $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ determinare il coefficiente di posto $(1, 2)$ della matrice A^{-1} : ______

- Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ lineare. Sapendo che $f \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $f \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$, allora $f \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \\ \end{pmatrix}$

SECONDA PARTE

I risultati devono essere giustificati attraverso calcoli e spiegazioni

Esercizio 1. [punteggio: 0-6]
Si determinino le soluzioni complesse del seguente sistema:

$$\begin{cases} z^4 = 9 \cdot \overline{z}^2 \\ |z+4| \leq 1 \end{cases}$$

Esercizio 2. [punteggio: 0-6]
Al variare del parametro reale t sia $\mathcal{L}_{A_t} : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare associata alla matrice

$$A_t = \begin{pmatrix} 1 & t & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ t & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

i) Determinare, al variare di $t \in \mathbb{R}$, $\dim(Ker(\mathcal{L}_{A_t}))$ e $\dim(Im(\mathcal{L}_{A_t}))$.

ii) Determinare i valori di $t \in \mathbb{R}$ per cui esiste almeno una soluzione del sistema $A_t \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}$

(iii) Posto $t = 2$ dire se $\mathbb{R}^3 = Im(\mathcal{L}_{A_t}) \bigoplus Ker(\mathcal{L}_{A_t})$.

Esercizio 3. [punteggio: 0-3] Determinare un'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che

$$Im(f) = \{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \quad : \quad x_1 - x_2 - x_3 = 0 \}; \quad Ker(f) = \langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle$$

Si determini una matrice $A \in \mathcal{M}at(3 \times 3; \mathbb{R})$ tale che $f = \mathcal{L}_A$.

Esercizio 4. [punteggio: 0-6]
Si consideri la matrice A

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

(i) Si determinino gli autovalori di A specificandone la molteplicità algebrica e geometrica.
(ii) Si determinino gli autovettori di A.
(iii) Dire se A è triangolarizzabile e/o diagonalizzabile.