Ingegneria Gestionale - Corso di Algebra - anno accademico 2007/2008

prova scritta del 28/1/2008

TEMPO A DISPOSIZIONE: 75 minuti per ciascuna parte

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

PRIMA PARTE (75 minuti)

I risultati devono essere giustificati attraverso calcoli e spiegazioni

Esercizio 1. [punteggio: 0-4]

Dato il numero complesso $z = 2 - 2i$

(i) determinare la parte reale e la parte immaginaria di z^4

(ii) determinare la parte reale e la parte immaginaria di z^{-1}

Esercizio 2. [punteggio: 0-6]

Si determinino le soluzioni complesse del seguente sistema:

$$\begin{cases} e^z = \frac{i}{2-2i} \\ |e^{iz}| > 1 \end{cases}$$

Esercizio 3. [punteggio: 0-5]

Siano W il sottospazio di $\mathbb{R}^3$ generato dai vettori $w_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $w_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$, $w_3 = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$

Z il sottospazio di $\mathbb{R}^3$ di equazione $Z = \{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \quad : \quad 4x_1 + x_2 - x_3 = 0\}$

(i) Determinare una base di W e una di Z

(ii) Determinare una base di $W \cap Z$.

Ingegneria Gestionale - Corso di Algebra - anno accademico 2007/2008

prova scritta del 28/1/2008

TEMPO A DISPOSIZIONE: 75 minuti per ciascuna parte

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

SECONDA PARTE (75 minuti)

I risultati devono essere giustificati attraverso calcoli e spiegazioni

- **Esercizio 4. [punteggio: 0-6]**

Al variare del parametro reale t sia $f_t : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare definita da

$$f_t \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & +(t-1)x_2 & +x_3 \\ tx_1 & +x_2 & -tx_3 \\ x_1 & +tx_2 & +2x_3 \end{pmatrix}$$

(i) Al variare del parametro reale t si determini la dimensione di $Ker(f_t)$ e la dimensione di $Im(f_t)$.

(ii) Determinare per quali valori di t esiste almeno una soluzione del sistema $f_t \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$

(iii) Dato il sottospazio di $\mathbb{R}^3$ $Z = \{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \quad : \quad x_1 + x_2 - x_3 = 0\}$

determinare per quali valori di t si ha $\mathbb{R}^3 = Z \bigoplus Ker(f_t)$

- **Esercizio 5. [punteggio: 0-5]**

Sia $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ l'applicazione lineare espressa rispetto alla base canonica dalla matrice

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(i) Si determinino gli autovalori di f specificandone la molteplicità algebrica e geometrica.

(ii) Si determinino gli autovettori di f.

- **Esercizio 6. [punteggio: 0-4]**

Determinare per quali valori del parametro β la seguente matrice A è triangolarizzabile e/o diagonalizzabile

$$A = \begin{pmatrix} \beta & 0 & (1-\beta) \\ 0 & \beta & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Ingegneria Gestionale - Corso di Algebra - anno accademico 2007/2008

prova scritta del 28/1/2008

TEMPO A DISPOSIZIONE: 75 minuti per ciascuna parte

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

PRIMA PARTE (75 minuti)

I risultati devono essere giustificati attraverso calcoli e spiegazioni

Esercizio 1. [punteggio: 0-4]

Dato il numero complesso $z = -2 + 2i$

(i) determinare la parte reale e la parte immaginaria di z^4

(ii) determinare la parte reale e la parte immaginaria di z^{-1}

Esercizio 2. [punteggio: 0-6]

Si determinino le soluzioni complesse del seguente sistema:

$$\begin{cases} e^z = \frac{i}{-2+2i} \\ |e^{iz}| < 1 \end{cases}$$

Esercizio 3. [punteggio: 0-5]

Siano W il sottospazio di $\mathbb{R}^3$ generato dai vettori $w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ $w_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $w_3 = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$

Z il sottospazio di $\mathbb{R}^3$ di equazione $Z = \{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \quad : \quad 4x_1 + x_2 - 4x_3 = 0\}$

(i) Determinare una base di W e una di Z

(ii) Determinare una base di $W \cap Z$.

Ingegneria Gestionale - Corso di Algebra - anno accademico 2007/2008

prova scritta del 28/1/2008

TEMPO A DISPOSIZIONE: 75 minuti per ciascuna parte

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

SECONDA PARTE (75 minuti)

I risultati devono essere giustificati attraverso calcoli e spiegazioni

- **Esercizio 4. [punteggio: 0-6]**

Al variare del parametro reale t sia $f_t : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare definita da

$$f_t \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & +(t-1)x_2 & +x_3 \\ x_1 & +tx_2 & +2x_3 \\ tx_1 & +x_2 & -tx_3 \end{pmatrix}$$

(i) Al variare del parametro reale t si determini la dimensione di $Ker(f_t)$ e la dimensione di $Im(f_t)$.

(ii) Determinare per quali valori di t esiste almeno una soluzione del sistema $f_t \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}$

(iii) Dato il sottospazio di $\mathbb{R}^3$ $Z = \{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \quad : \quad x_1 - x_2 - x_3 = 0\}$

determinare per quali valori di t si ha $\mathbb{R}^3 = Z \bigoplus Ker(f_t)$

- **Esercizio 5. [punteggio: 0-5]**

Sia $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ l'applicazione lineare espressa rispetto alla base canonica dalla matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & -3 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

(i) Si determinino gli autovalori di f specificandone la molteplicità algebrica e geometrica.

(ii) Si determinino gli autovettori di f.

- **Esercizio 6. [punteggio: 0-4]**

Determinare per quali valori del parametro β la seguente matrice A è triangolarizzabile e/o diagonalizzabile

$$A = \begin{pmatrix} \beta & 0 & (2-\beta) \\ 0 & \beta & 3 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$