

SECONDA PARTE

I risultati devono essere giustificati attraverso calcoli e spiegazioni

• Esercizio 1. [punteggio: 0-6]

Al variare del parametro reale t sia $f_t : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare definita da

$$f_t \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & +x_2 & +x_3 \\ tx_1 & +2x_2 & +tx_3 \\ tx_1 & & +4x_3 \end{pmatrix}$$

(i) Al variare del parametro reale t si determini la dimensione di $\text{Ker}(f_t)$ e la dimensione di $\text{Im}(f_t)$.

(ii) Determinare per quali valori di t esiste almeno una soluzione del sistema $f_t \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$

(iii) Dato il sottospazio vettoriale di \mathbb{R}^3 , $W = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle$,

Determinare per quali valori di t si ha $\mathbb{R}^3 = \text{Im}(f_t) \oplus W$.

• Esercizio 2. [punteggio: 0-5]

Sia $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare espressa rispetto alla base canonica dalla matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

(i) Si determinino gli autovalori di f specificandone la molteplicità algebrica e geometrica.

(ii) Si determinino gli autovettori di f .

(iii) Esiste una base di \mathbb{R}^3 costituita da autovettori per f ?