Dipartimento di Matematica Applicata
« Ulisse Dini »

Calcolo Numerico

Corso di Laurea in Ingegneria Elettronica a.a. 2001/2002

Appello del 26 settembre 2002

`Problema 1`

Siano

$$H = \begin{bmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbf{R}^{3\times 3} \quad , \quad c \in \mathbf{R}^3$$

Determinare l'insieme

$$\mathcal{C} = \{(a_1, a_2, a_3) \in \mathbf{R}^3 \text{ t.c. il metodo iterativo definito da } H \text{ e } c \text{ è convergente}\}$$

`Problema 2`

Sia H la matrice definita nel Problema 1, con $a_1 = 1, a_2 = 1, a_3 = 1$. Determinare la matrice $P \in \mathbf{R}^{3\times 3}$ tale che per ogni $v \in \mathbf{R}^3$ si abbia

$$Pv = \text{proiezione ortogonale di } v \text{ su } \ker H$$

`Problema 3`

Posto $M = F(10, 12, -498, 500)$, sia `SQRT` la pseudo–funzione definita da $\texttt{SQRT}(\xi) = \mathrm{rd}(\sqrt{\xi})$. Operando in M si ha $\texttt{SQRT}(150) = 12,2474487139$. Determinare l'esponente di $\sqrt{150}$.

Dipartimento di Matematica Applicata
« Ulisse Dini »

Calcolo Numerico

Corso di Laurea in Ingegneria Elettronica a.a. 1999/2000

Appello del 26 settembre 2002

`Problema 1`

Siano

$$H = \begin{bmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbf{R}^{3\times 3} \quad , \quad c \in \mathbf{R}^3$$

Determinare l'insieme

$$\mathcal{C} = \{(a_1, a_2, a_3) \in \mathbf{R}^3 \text{ t.c. il metodo iterativo definito da } H \text{ e } c \text{ è convergente}\}$$

`Problema 2`

Si consideri $\mathbf{R}^3$ con prodotto scalare canonico, e sia

$$W = \{(x_1, x_2, x_3)^T \in \mathbf{R}^3 \text{ tali che } x_1 - x_3 = 0; -x_2 + x_3 = 0\}$$

Determinare la migliore approssimazione di $(2, 1, 0)^T$ in W nel senso dei minimi quadrati.

`Problema 3`

Sia $\mathcal{G} = \langle 1, t, t^3 \rangle$. Determinare tutti gli elementi $g \in \mathcal{G}$ che verificano le condizioni

$$g(1) = 0 \quad , \quad \int_0^1 g(x)\, dx = 0$$

Soluzione

`Problema 1`

Il metodo iterativo definito da H e c è convergente se e solo se $\rho(H) < 1$. Il polinomio caratteristico di H è

$$\det(H - \lambda I) = -\lambda\Big(\lambda^2 + (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)\Big)$$

Quindi

$$\sigma(H) = \{\,0, i\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}, -i\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}\,\}$$

e $\rho(H) = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$. L'insieme richiesto è allora

$$\mathcal{C} = \{(a_1, a_2, a_3) \in \mathbf{R}^3 \text{ t.c. } a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 < 1\}$$

`Problema 2` (a.a. 1999/2000)

W è uno spazio vettoriale di dimensione 1. Infatti, posto

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

si ha $W = \ker A$ e quindi

$$W = \langle \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \rangle$$

Posto $w = (1, 1, 1)^T$, il vettore cercato v^* è la proiezione ortogonale di $v = (2, 1, 0)^T$ su w :

$$v^* = \frac{v \bullet w}{w \bullet w}\, w = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

`Problema 2` (a.a. 2001/2002)

Poiché

$$\ker H = \langle \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \rangle$$

posto $w = (1, 1, 1)^T$ e $v = (v_1, v_2, v_3)^T$ si ha

$$Pv = \frac{v \bullet w}{w \bullet w}\, w = \frac{v_1 + v_2 + v_3}{3} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Allora

$$P = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

`Problema 3` (a.a. 2001/2002)

Posto $\xi = \texttt{SQRT}(150)$, per la definizione di `SQRT` si ha

$$\sqrt{150} \in \left[\frac{\xi + \pi(\xi)}{2}; \frac{\xi + \sigma(\xi)}{2}\right) = [10^2\, 0.12 \ldots 385; 10^2\, 0.12 \ldots 395)$$

Quindi l'esponente di $\sqrt{150}$ è 2.

`Problema 3` (a.a. 1999/2000)
Si cercano gli elementi g della forma

$$g(t) = a_0 + a_1 t + a_3 t^3$$

che verificano le condizioni

$$\begin{cases} a_0 + a_1 + a_3 = 0 \\ a_0 + \frac{1}{2}a_1 + \frac{1}{4}a_3 = 0 \end{cases}$$

Le soluzioni del sistema sono

$$\{(a_0, a_1, a_3)^T = \lambda(1/2, -3/2, 1)^T \quad , \quad \lambda \in \mathbf{R}\}$$

quindi gli elementi cercati sono

$$\{\, \lambda \, \frac{1 - 3t + 2t^3}{2} \quad , \quad \lambda \in \mathbf{R}\}$$