**Dipartimento di Matematica Applicata**
**« Ulisse Dini »**

# Analisi II e Calcolo Numerico

## Corso di Laurea in Ingegneria Elettronica

Appello del 23 settembre 2002

`Problema 1`

Sia $M = F(10, 6, -10, 10)$. Determinare l'insieme degli $x \in \mathbf{R}$ tali che $\mathrm{rd}(x) \in (\xi_m, \xi_M)$.

`Problema 2`

Sia $\mathcal{G} = \langle x, e^{-x} \rangle$. Determinare l'elemento di $\mathcal{G}$ che definisce un metodo iterativo ad un punto con ordine di convergenza ad 1 pari a 2.

`Problema 3`

Siano $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbf{R}$ e $\tau \in (1, +\infty)$. Si consideri il problema della determinazione dei coefficienti $a_0, a_1 \in \mathbf{R}$ tali che la funzione $a_0 + a_1 t$ interpola i dati $(1, \alpha_1), (\tau, \alpha_2)$.

Dopo aver ricondotto il problema alla soluzione di un sistema di equazioni lineari, si determini il valore di $\tau$ che rende minimo il numero di condizionamento $\mu_\infty$ della matrice del sistema.

Soluzione

`Problema 1`

L'insieme richiesto è

$$\Omega = \left[\frac{\xi_m + \sigma(\xi_m)}{2}, \frac{\pi(\xi_M) + \xi_M}{2}\right)$$

Essendo

$$\xi_m = 0,1\,10^{-10} \quad , \quad \sigma(\xi_m) = 0,100001\,10^{-10}$$

e

$$\xi_M = 0,999999\,10^{10} \quad , \quad \pi(\xi_M) = 0,999998\,10^{10}$$

si ha $\Omega = [0,1000005\,10^{-10}; 0,9999985\,10^{10})$.

`Problema 2`

Posto $h(x) = a_0 x + a_1 e^{-x}$, il metodo iterativo ad un punto definito da $h$ ha ordine di convergenza ad 1 pari a 2 se

$$h(1) = 1 \quad , \quad h'(1) = 0 \quad , \quad h^{(2)}(1) \neq 0$$

ossia se

$$\begin{array}{l} a_0 + e^{-1}a_1 = 1 \\ a_0 - e^{-1}a_1 = 0 \\ e^{-1}a_1 \neq 0 \end{array}$$

Le prime due equazioni forniscono $a_0 = 1/2, a_1 = e/2$, e questi valori verificano anche la terza. L'elemento richiesto è quindi

$$h(x) = \frac{x + e^{1-x}}{2}$$

`Problema 3`

Il problema di interpolazione è equivalente alla soluzione del sistema di equazioni

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & \tau \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \end{bmatrix}$$

Detta $M$ la matrice del sistema si ha

$$\mu_\infty(M) = \frac{(1+\tau)^2}{\tau - 1}$$

che sull'insieme $(1, +\infty)$ risulta minimo per $\tau = 3$. Il valore minimo è $\mu_\infty(M) = 8$.