Dipartimento di Matematica Applicata
« Ulisse Dini »

Calcolo Numerico

Corso di Laurea in Ingegneria Elettronica a.a. 2001/2002

Appello del 12 settembre 2002

`Problema 1`

Siano $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ e

$$A = \begin{bmatrix} 0 & \beta \\ \alpha & 0 \end{bmatrix} \in \mathbf{C}^{2\times 2}$$

Determinare, e poi rappresentare su un piano cartesiano, l'insieme

$$\mathcal{C} = \{(\alpha, \beta) \in \mathbf{R}^2 \text{ tali che } A \text{ convergente}\}$$

`Problema 2`

Sia $V = \{\text{polinomi a coefficienti reali di grado} \leq 2\}$ con prodotto scalare definito da

$$p \bullet q = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1)$$

Dopo aver dimostrato che per ogni $p \in V$ si ha $p \bullet p = 0 \Rightarrow p = 0$, si determini la norma di $v = 1 - t^2 \in V$ e l'insieme

$$W = \{w \in V \text{ tali che } w \perp v\}$$

`Problema 3`

Sia $M = F(10, 2, -9, 9)$.

Determinare l'insieme

$$A = \{\xi \in M \text{ tali che } \xi \oslash 4 = 0\}$$

Dipartimento di Matematica Applicata
« Ulisse Dini »

Calcolo Numerico

Corso di Laurea in Ingegneria Elettronica a.a. 1999/2000

Appello del 12 settembre 2002

`Problema 1`

Siano $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ e

$$A = \begin{bmatrix} 0 & \beta \\ \alpha & 0 \end{bmatrix} \in \mathbf{C}^{2\times 2}$$

Determinare, e poi rappresentare su un piano cartesiano, l'insieme

$$\mathcal{C} = \{(\alpha, \beta) \in \mathbf{R}^2 \text{ tali che } A \text{ convergente}\}$$

`Problema 2`

Sia $V = \{$polinomi a coefficienti reali di grado $\leq 2\}$ con prodotto scalare definito da

$$p \bullet q = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1)$$

Dopo aver dimostrato che per ogni $p \in V$ si ha $p \bullet p = 0 \Rightarrow p = 0$, si determini la norma di $v = 1 - t^2 \in V$ e l'insieme

$$W = \{w \in V \text{ tali che } w \perp v\}$$

`Problema 3`

Sia $f \in \mathcal{C}^1(\mathbf{R})$. Per approssimare l'integrale

$$I(f) = \int_{-1}^{1} f(t)\, dt$$

si considera una formula di quadratura della forma

$$J(f) = a_0 f(-1) + a_1 f'(0) + a_2 f(1)$$

con $a_0, a_1, a_2 \in \mathbf{R}$.

Determinare i valori dei pesi che rendono massimo il grado di precisione della corrispondente formula.

Soluzione

`Problema 1`

Il polinomio caratteristico di A è $P(\lambda) = \lambda^2 - \alpha\beta$.

Se $\alpha\beta = 0$, si ha $\sigma(A) = \{0\}$ e la matrice è convergente; se $\alpha\beta > 0$, si ha $\sigma(A) = \{\sqrt{\alpha\beta}, -\sqrt{\alpha\beta}\}$ e la matrice è convergente se e solo se $\alpha\beta < 1$; se $\alpha\beta < 0$, si ha $\sigma(A) = \{i\sqrt{-\alpha\beta}, -i\sqrt{-\alpha\beta}\}$ e la matrice è convergente se e solo se $\alpha\beta > -1$.

L'insieme $\mathcal{C}$ si determina immediatamente.

`Problema 2`

Poiché $p \bullet p = 0 \Rightarrow p(-1) = 0, p(0) = 0, p(1) = 0$, l'asserto segue dal teorema di esistenza ed unicità dell'interpolazione polinomiale.

Poiché $v(-1) = 0, v(0) = 1, v(1) = 0$, si ha $||v|| = 1$. Inoltre, posto $w = a_0 + a_1 t + a_2 t^2$, si ha $w \bullet v = a_0$ e l'insieme cercato risulta

$$W = \{a_1 t + a_2 t^2 \text{ tali che } a_1, a_2 \in \mathbf{R}\}$$

`Problema 3` (a.a. 2001/2002)

Poiché

$$\mathrm{rd}(\xi) = 0 \quad \text{se e solo se} \quad \xi \in (-\frac{\xi_m}{2}, \frac{\xi_m}{2})$$

con $\xi_m = 0,10 \cdot 10^{-9}$, l'insieme cercato è $(-2\xi_m, 2\xi_m) \cap M = \{-0.19\,10^{-9}, \ldots, 0.19\,10^{-9}\}$.

`Problema 3` (a.a. 1999/2000)

Imponendo le uguaglianze $J(t^k) = I(t^k)$ per $k = 0, 1, 2$, si ottiene il sistema

$$\begin{cases} a_0 + a_2 = 2 \\ -a_0 + a_1 + a_2 = 0 \\ a_0 + a_2 = \frac{2}{3} \end{cases}$$

Poiché la prima e la terza equazione sono incompatibili, non ci sono formule di quadratura con grado di precisione > 1; inoltre, dalle prime due equazioni si ottiene che per ogni $\lambda \in \mathbf{R}$, i pesi

$$a_0 = \frac{2 + \lambda}{2} \quad , \quad a_1 = \lambda \quad , \quad a_2 = \frac{2 - \lambda}{2}$$

generano formule di quadratura con grado di precisione pari ad 1.