Dipartimento di Matematica Applicata
« Ulisse Dini »

Calcolo Numerico

Corso di Laurea in Ingegneria Elettronica a.a. 2001/2002

Appello del 11 luglio 2002

`Problema 1`

Posto $M = F(10, 12, -498, 500)$, sia `LN` la pseudo–funzione definita da $\texttt{LN}(\xi) = \mathrm{rd}(\ln(\xi))$.

(a) Indicare l'insieme di definizione di `LN`.

Per approssimare la funzione $f(x) = \frac{\ln x}{3}$ si considera l'algoritmo $\phi(\xi) = \texttt{LN}(\xi) \oslash 3$.

(b) Stimare l'errore relativo totale

$$\epsilon_t = \frac{\phi(2) - f(2)}{f(2)}$$

in termini di precisione di macchina u.

`Problema 2`

Si consideri $\mathbf{R}^3$ con prodotto scalare canonico, e sia

$$W = \{(x_1, x_2, x_3)^T \in \mathbf{R}^3 \text{ tali che } x_1 + 2x_2 - x_3 = 0\}$$

Determinare la migliore approssimazione di $(0, 0, 1)^T$ in W nel senso dei minimi quadrati.

`Problema 3`

Sia $H = \alpha I + \beta J \in \mathbf{R}^{2\times 2}$, con $J = (e_2, e_1)$.

(a) Determinare l'insieme dei valori di α e β che rendono H convergente e definita positiva.

(b) Posto $\alpha = 1, \beta = 2$ e $c = (1, 0)^T$, determinare la successione generata dal metodo iterativo lineare definito da H e c a partire da $(0, 1)^T$.

Dipartimento di Matematica Applicata
« Ulisse Dini »

Calcolo Numerico

Corso di Laurea in Ingegneria Elettronica a.a. 1999/2000

Appello del 11 luglio 2002

`Problema 1`

Sia $p(X) = 3X^4 - 6X^2 + 3X - 12$. Determinare una regione del piano complesso che contiene tutte le radici di p.

`Problema 2`

Si consideri $\mathbf{R}^3$ con prodotto scalare canonico, e sia

$$W = \{(x_1, x_2, x_3)^T \in \mathbf{R}^3 \text{ tali che } x_1 + 2x_2 - x_3 = 0\}$$

Determinare la migliore approssimazione di $(0,0,1)^T$ in W nel senso dei minimi quadrati.

`Problema 3`

Sia $H = \alpha I + \beta J \in \mathbf{R}^{2\times 2}$, con $J = (e_2, e_1)$.

(a) Determinare l'insieme dei valori di α e β che rendono H convergente e definita positiva.

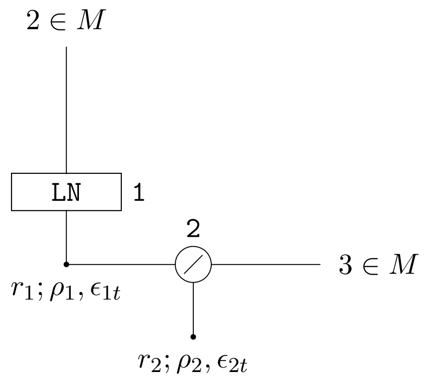
(b) Posto $\alpha = 1, \beta = 2$ e $c = (1,0)^T$, determinare la successione generata dal metodo iterativo lineare definito da H e c a partire da $(0,1)^T$.

Soluzione

`Problema 1` (a.a. 2001/2002)
Poiché $\ln x$ è definita solo per $x > 0$, l'insieme di definizione di `LN` è

$$\{\ \xi \in M \text{ tali che } \xi > 0\} = [10^{-498}\, 0.10\cdots 0; 10^{500}\, 0.9\cdots 9]$$

Una stima dell'errore relativo totale nell'uso di $\phi(2)$ per approssimare $f(2)$ si ottiene considerando il diagramma di figura.



Si ha: $|\epsilon_{1a}| \leq u, \epsilon_{1d} = 0$ (perché $2 \in M$), $|\epsilon_{2a}| \leq u, \epsilon_{2d} = \epsilon_{1t}$ (perché $3 \in M$). Infine:

$$|\epsilon_t| = |\epsilon_{2t}| = |\epsilon_{2a} + \epsilon_{2d} + \epsilon_{2a}\epsilon_{2d}| \leq u + u + u^2 = 2u + u^2$$

`Problema 1` (a.a. 1999/2000)
Detta A la matrice compagna di $X^4 - 2X^2 + X - 4$ si ha

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 4 & -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

e

$$\sigma(A) = \{ \text{ radici di } p(X) \ \}$$

Utilizzando il Teorema di Gershgorin per A si ottiene $\sigma(A) \subset \{z \text{ tali che } |z| < 7\}$. Utilizzandolo per A^T si ottiene $\sigma(A^T) \subset \{z \text{ tali che } |z| < 4\}$.

Osservando che $\sigma(A^T) = \sigma(A)$ si ha infine

$$\sigma(A) \subset \{z \text{ tali che } |z| < 4\}$$

`Problema 2`
Posto, ad esempio, $w_1 = (1, 0, 1)^T$ e $w_2 = (0, 1, 2)^T$, si ha $W = \langle w_1, w_2 \rangle$. Il problema è

adesso ricondotto a quello di determinare $a_1, a_2 \in \mathbf{R}$ tali che il vettore $a_1 w_1 + a_2 w_2$ sia la proiezione ortogonale di $(0,0,1)^T$ su W. Utilizzando le equazioni normali

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

si ottiene $a_1 = \frac{1}{6}, a_2 = \frac{1}{3}$. Si osservi che la soluzione delle equazioni normali è unica perché w_1 e w_2 sono linearmente indipendenti. L'elemento cercato è quindi

$$\frac{1}{6} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}$$

`Problema 3`

(a) Poiché $\sigma(H) = \alpha + \beta\, \sigma(J)$ e $\sigma(J) = \{1, -1\}$, si ha $\sigma(H) = \{\alpha + \beta, \alpha - \beta\}$.

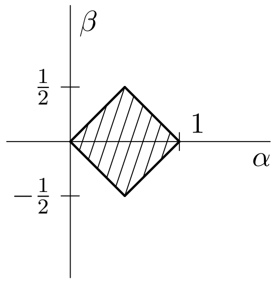
I valori di α e β che rendono H convergente sono quelli tali che $\rho(H) < 1$, cioè

$$\begin{cases} -1 < \alpha + \beta < 1 \\ -1 < \alpha - \beta < 1 \end{cases}$$

Quelli che rendono H definita positiva sono quelli tali che $\det H[1] \neq 0$ e $\det H[2] \neq 0$, cioè

$$\begin{cases} \alpha > 0 \\ \alpha^2 - \beta^2 > 0 \end{cases}$$

I valori richiesti sono quindi quelli rappresentati in figura.



(b) Con i valori di α e β assegnati si ha $\sigma(H) = \{-1, 3\}$. Gli autospazi relativi sono

$$V(-1) = \langle v_1 \rangle \quad , \quad V(3) = \langle v_2 \rangle$$

con

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad , \quad v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Poiché $1 \notin \sigma(H)$, l'unico punto unito della funzione $x \to Hx + c$ è $x^* = (0, -\frac{1}{2})^T$.

Per determinare la successione definita da $x^{(k+1)} = Hx^{(k)} + c$ a partire dal valore assegnato di $x^{(0)}$, si consideri la successione $e^{(k)} = x^{(k)} - x^*$. Tale successione risulta definita da $e^{(k+1)} = He^{(k)}$ a partire da $e^{(0)} = x^{(0)} - x^* = \frac{3}{4}(v_2 - v_1)$. Allora si ha

$$e^{(k)} = -\frac{3}{4}(-1)^k v_1 + \frac{3}{4}(3)^k v_2$$

da cui

$$x^{(k)} = -\frac{3}{4}(-1)^k v_1 + \frac{3}{4}(3)^k v_2 + x^*$$