Dipartimento di Matematica Applicata
« Ulisse Dini »

Analisi II e Calcolo Numerico

Corso di Laurea in Ingegneria Elettronica

Calcolo Numerico

Corso di Laurea in Ingegneria Elettronica

Corso di Laurea in Ingegneria delle Telecomunicazioni

Appello del 7 gennaio 2009

`Problema 1`

Siano $M = F(2,3)$ e $x = \frac{2}{5}$.

(a) Calcolare esponente e frazione di x in base 2.

(b) Decidere se $x \in M$.

(c) Calcolare $\mathrm{rd}(x)$ e $\delta(x)$.

`Problema 2`

Siano

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \qquad \text{e} \qquad b = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Determinare una fattorizzazione QR di A ed utilizzare la fattorizzazione ottenuta per risolvere il sistema $Ax = b$.

`Problema 3`

Determinare gli elementi di $\langle 1, 2^t \rangle$ che meglio approssimano i dati $(0,0), (0,1), (1,0), (1,1)$ nel senso dei minimi quadrati.

Soluzione

Problema 1

(a) Per calcolare l'esponente e la frazione di x relativi alla base 2 si constata che

$$2^{-2} < x < 2^{-1}$$

perciò:

$$\textit{esponente} = -1 \ \textit{e (di conseguenza) frazione} = 2x = \frac{4}{5}$$

(b) Per decidere se $x \in M$, è sufficiente decidere se la scrittura della frazione in base 2 è compatibile con la precisione di M (in questo caso 3). Siccome si ricava che

$$\text{la scrittura di } \tfrac{4}{5} \text{ in base 2 è } 0.11001100\ldots$$

se ne deduce che

$$x = 2^{-1}\, 0.11001100\ldots \ \textit{non appartiene ad } M$$

(c) Per determinare l'arrotondato di x, si considerano i numeri di macchina adiacenti ad x: $\xi_1 = 2^{-1}\, 0.110$ (il più grande elemento di M minore di x) e $\xi_2 = \sigma(\xi_1) = 2^{-1}\, 0.111$ (il più piccolo elemento di M maggiore di x). Siccome

$$x < \text{punto medio del segmento di estremi } \xi_1, \xi_2$$

si conclude che

$$\textit{l'arrotondato di } x \textit{ è: } \mathrm{rd}(x) = \xi_1 = 2^{-1}\, 0.110$$

Infine, dalla definizione

$$\textit{l'errore assoluto è: } \delta(x) = \mathrm{rd}(x) - x = -\tfrac{1}{40}$$

Problema 2

Una fattorizzazione QR di A si può determinare in due passi.

(1) Si constata che le colonne di A sono linearmente indipendenti, quindi esistono certamente colonne $w_1, w_2, w_3 \in \mathbf{R}^3$ ortogonali rispetto al prodotto scalare canonico e $\theta_{12}, \theta_{13}, \theta_{23} \in \mathbf{R}$ tali che

$$A = (w_1, w_2, w_3) \begin{bmatrix} 1 & \theta_{12} & \theta_{13} \\ 0 & 1 & \theta_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Dall'uguaglianza letta per colonne si ricava che, dette a_1, a_2, a_3 le colonne di A:

$$a_1 = w_1 \quad , \quad a_2 = w_1\theta_{12} + w_2 \quad , \quad a_3 = w_1\theta_{13} + w_2\theta_{23} + w_3$$

Dalla prima relazione si ricava w_1, dalla seconda si ricavano θ_{12} (moltiplicando scalarmente l'uguaglianza per w_1) e poi w_2, dalla terza si ricavano infine θ_{13} (moltiplicando scalarmente per w_1), θ_{23} (moltiplicando scalarmente per w_3) e poi w_3 ottenendo:

$$A = \Omega\Theta = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(2) Si ricavano i fattori richiesti ponendo

$$\Delta = \mathrm{diag}(||w_1||, ||w_2||, ||w_3||) \quad , \quad U = \Omega\Delta^{-1} \quad , \quad T = \Delta\Theta$$

Infine, *una fattorizzazione QR di A è*

$$A = UT = \begin{bmatrix} 0 & \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & \sqrt{5} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{5} \end{bmatrix}$$

Dalla fattorizzazione ottenuta si ricava il sistema

$$Tx = U^{\mathsf{T}}b$$

equivalente ad $Ax = b$. *La soluzione* (ottenuta prima calcolando $c = U^{\mathsf{T}}b$ e poi risolvendo "all'indietro" il sistema $Tx = c$) *è*

$$x = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

`Problema 3`

Imponendo le condizioni di interpolazione si ottiene il sistema

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

le cui soluzioni nel senso dei minimi quadrati danno i coefficienti delle combinazioni lineari richieste. Le equazioni normali risultano

$$\begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

da cui $a_0 = \frac{1}{2}$ e $a_1 = 0$ (si osservi che si ottiene una sola soluzione, come dovevamo aspettarci, essendo linearmente indipendenti le colonne di A).

Infine

l'elemento (unico) che meglio approssima i dati è: $g(t) = \frac{1}{2}$