Dipartimento di Matematica Applicata
« Ulisse Dini »

Analisi II e Calcolo Numerico

Corso di Laurea in Ingegneria Elettronica

Calcolo Numerico

Corso di Laurea in Ingegneria Elettronica

Corso di Laurea in Ingegneria delle Telecomunicazioni

Appello del 15 settembre 2008

`Problema 1`

Siano $M = F(2,2)$ ed $x = 9$. Decidere se $x \in M$ e calcolare $\mathrm{rd}(x)$.

`Problema 2`

Determinare tutti gli elementi $p(x) \in P_2(\mathbf{R})$ per i quali sia $x = 1$ che $x = -1$ sono punti uniti.

`Problema 3`

Sia

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(a) Determinare $||A||_1$ e poi $v \in \mathbf{R}^5$ tale che

$$\frac{||Av||_1}{||v||_1} = ||A||_1$$

(b) Determinare $||A||_\infty$ e poi $v \in \mathbf{R}^5$ tale che

$$\frac{||Av||_\infty}{||v||_\infty} = ||A||_\infty$$

Soluzione

`Problema 1`

In questo caso, si constata facilmente che $x = 1001 = 2^4\, 0.1001$ e quindi che $x \notin M$.

Per determinare l'arrotondato di x in M, si considerano i due numeri di macchina adiacenti ad x: $\xi_1 = 2^4\, 0.10$ (il più grande elemento di M minore di x) e $\xi_2 = \sigma(\xi_1) = 2^4\, 0.11$ (il più piccolo elemento di M maggiore di x). Occorre decidere a quale dei due sia più vicino x. Siccome

$$x < \text{punto medio tra } \xi_1 \text{ e } \xi_2$$

si ha: $\mathrm{rd}(x) = \xi_1 = 2^4\, 0.10$.

`Problema 2`

Gli elementi richiesti sono *tutti* quelli per i quali $p(1) = 1$ e $p(-1) = -1$. Dunque il problema consiste nel determinare *tutti* gli elementi di $P_2(\mathbf{R})$ che interpolano i dati $(1,1)$ e $(-1,-1)$.

Scegliendo per $P_2(\mathbf{R})$ la "base di Newton": 1, $x-1$, $(x-1)(x+1)$, il problema si trasforma in quello di determinare *tutte* le soluzioni del sistema

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

ottenuto imponendo le condizioni di interpolazione al polinomio scritto nella base scelta.

Per determinare *tutte* le soluzioni del sistema occorre determinarne una soluzione particolare (ad esempio $(1,1,0)^\mathsf{T}$) ed il nucleo della matrice dei coefficienti. Si ottiene

$$\ker \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \end{bmatrix} = \langle \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \rangle$$

dunque *tutte* le soluzioni del sistema sono

$$\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \lambda \end{bmatrix} \ , \ \lambda \in \mathbf{R} \}$$

Infine, ricordando il legame tra le soluzioni del sistema e quelle del problema di interpolazione, *tutti* gli elementi richiesti sono:

$$\{1 + (x-1) + \lambda(x-1)(x+1)\ ,\ \lambda \in \mathbf{R}\} = \{x + \lambda(x^2-1)\ ,\ \lambda \in \mathbf{R}\}$$

`Problema 3`

(a) Per calcolare la norma richiesta, indichiamo con $a_1, \ldots, a_5 \in \mathbf{R}^5$ le colonne di A. Si ha allora:

$$||A||_1 = \max\{||a_1||_1, \ldots, ||a_5||_1\} = \max\{3, 3, 5, 1, 0\} = 5$$

La seconda parte della domanda equivale a determinare un vettore v *non nullo* tale che

$$||Av||_1 = ||A||_1 ||v||_1$$

Siccome $||A||_1 = ||a_3||_1 = ||Ae_3||_1$ (si indicano con $e_1, \ldots, e_5$ gli elementi della base canonica di $\mathbf{R}^5$) e $||e_3|| = 1$, si constata che il vettore e_3 verifica la richiesta.

(b) Questa è la parte più difficile del problema.

Per calcolare la norma richiesta, indichiamo con $\alpha_1, \ldots, \alpha_5 \in \mathbf{R}^5$ le colonne di A^T. Si ha allora:

$$||A||_\infty = ||A^\mathsf{T}||_1 = \max\{||\alpha_1||_1, \ldots, ||\alpha_5||_1\} = \max\{3, 1, 3, 3, 2\} = 3$$

La seconda parte della domanda equivale a determinare un vettore v *non nullo* tale che

$$||Av||_\infty = ||A||_\infty ||v||_\infty$$

Siccome

$$||A||_\infty = \max\{||Av||_\infty \ , \ ||v||_\infty = 1\}$$

esiste certamente un vettore v^* tale che $||v^*||_\infty = 1$ e $||Av^*||_\infty = ||A||_\infty$. Dunque, esiste un vettore di norma infinito unitaria che verifica la richiesta. Si tratta perciò di determinare un vettore v^* con $||v^*||_\infty = 1$ che renda almeno una componente di Av^* di valore assoluto pari a $||A||_\infty$ (cosicché $||Av^*||_\infty = ||A||_\infty$: le altre componenti di Av^* hanno necessariamente valore assoluto non maggiore di $||A||_\infty \ldots$).

Si osservi adesso che scelto un indice j e posto $v^* = (v_1^*, \ldots, v_5^*)^\mathsf{T}$ con

$$v_k^* = \begin{cases} \ \ 1 & \text{se } \alpha_{jk} \geq 0 \\ -1 & \text{se } \alpha_{jk} < 0 \end{cases}$$

la componente $j-$esima di Av^*, ovvero $\alpha_j^\mathsf{T} v^*$, vale $||\alpha_j||_1$, e $||v^*||_\infty = 1$.

Siccome $||A||_\infty = ||\alpha_1||_1$, si constata che $v^* = (1, 1, -1, 1, 1)^\mathsf{T}$ verifica la richiesta.