Dipartimento di Matematica Applicata
« Ulisse Dini »

Analisi II e Calcolo Numerico

Corso di Laurea in Ingegneria Elettronica

Calcolo Numerico

Corso di Laurea in Ingegneria Elettronica

Corso di Laurea in Ingegneria delle Telecomunicazioni

Appello del 14 luglio 2008

`Problema 1`

Sia $M = F(10, 2)$. Dopo aver verificato che $3 \in M$ e $7 \in M$, determinare tutti gli elementi $\xi \in M$ tali che $\xi \oplus 3 \geq 7$.

`Problema 2`

Si consideri la funzione $h(x) = \ln x + 3$.

(a) Determinare il numero di punti uniti di h.

(b) Per ciascuno dei punti uniti, decidere se il metodo iterativo definito da h sia utilizzabile per approssimarlo e, in caso affermativo: indicare un valore x_0 a partire dal quale, operando in $\mathbf{R}$, la successione generata dal metodo iterativo risulta convergente e decidere se la successione sia monotona.

`Problema 3`

Siano

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad , \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

e $A = SD$.

(a) Determinare la matrice A e poi decidere se S, D sia una fattorizzazione QR di A.

(b) Calcolare $S^{\mathsf{T}} S$ e poi S^{-1}.

(c) Utilizzare la fattorizzazione assegnata per calcolare A^{-1}.

Soluzione

`Problema 1`

Per verificare che $3 \in M$ e che $7 \in M$, basta constatare che $3 = 10^1\ 0.30$ e che $7 = 10^1\ 0.70$.

Per determinare tutti gli elementi $\xi \in M$ tali che $\xi \oplus 3 \geq 7$, si hanno due alternative:

Prima soluzione:
Si constata che la richiesta equivale a determinare gli $\xi \in M$ tali che $\mathrm{rd}(\xi + 3) \geq 7$ e che questi sono gli elementi di M che fanno parte dell'insieme

$$\{x \in \mathbf{R} \quad \text{tali che} \quad \mathrm{rd}(x+3) \geq 7\}$$

Quest'ultimo insieme si determina facilmente dalle proprietà della funzione rd: posto $\alpha =$ il punto centrale dell'intervallo $[\pi(7), 7] = 10^1\ 0.695$, per ogni $x \in \mathbf{R}$ si ha

$$\mathrm{rd}(x+3) \geq 7 \quad \text{se e solo se} \quad x+3 \geq \alpha \quad \text{ovvero se e solo se} \quad x \geq \alpha - 3 = 10^1\ 0.395$$

Poiché $10^1\ 0.395 \notin M$ (la frazione non è compatibile con la precisione) e il più piccolo elemento di M maggiore di $10^1\ 0.395$ è $10^1\ 0.40$, i numeri di macchina richiesti sono:

tutti quelli maggiori o uguali a $10^1\ 0.40$

Seconda soluzione:
Si constata che la funzione $\xi \to \xi \oplus 3$ è *non decrescente* e che

$$4 \in M \quad , \quad 4 \oplus 3 = 7 \quad , \quad \pi(4) \oplus 3 < 7$$

Dunque i numeri di macchina richiesti sono:

tutti quelli maggiori o uguali a $4 = 10^1\ 0.40$

`Problema 2`

La funzione h assegnata è definita solo per $x > 0$.

(a) L'insieme dei punti uniti di h coincide con l'insieme degli zeri della funzione $f(x) = h(x) - x$. Anche f è definita solo per $x > 0$, e si ha

$$\lim_{x \to 0} f(x) = -\infty \quad , \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty \quad \text{e} \quad f(1) = 2$$

Poiché f è *continua* sull'insieme di definizione, i due limiti e il valore $f(1)$ assicurano che f ha *almeno* due zeri.

Per decidere se gli zeri sono più di due, si osserva che sull'intervallo di definizione f è derivabile due volte con

$$f''(x) = -\frac{1}{x^2}$$

Poiché questa funzione è diversa da zero sull'intervallo di definizione di f, f ha *non più* di due zeri. Dunque, dalle due informazioni ottenute si conclude che f ha due zeri, ovvero che

h ha due punti uniti

(b) Detto α_1 il più piccolo dei punti uniti e α_2 l'altro, dalle considerazioni precedenti si deduce che $\alpha_1 \in (0,1)$ e $\alpha_2 \in (1,+\infty)$.

Decidere se il metodo iterativo sia utilizzabile per approssimare un punto unito significa decidere se sia possibile determinare un intervallo I contenente il punto unito che verifica anche la seconda ipotesi del Teorema di convergenza locale, ovvero tale che

$$\text{esiste } L \in \mathbf{R} \text{ tale che: } 0 \leq L < 1 \text{ e per ogni } x \in I \text{ si ha } |h'(x)| \leq L$$

Per ogni $x > 0$ si ha

$$h'(x) = \frac{1}{x}$$

dunque si ha $h'(\alpha_1) > 1$ e $0 < h'(\alpha_2) < 1$. Dalla prima disuguaglianza si deduce che

il metodo non è utilizzabile per approssimare α_1

mentre dalla seconda disuguaglianza e dalla continuità della funzione h' si deduce che

il metodo è utilizzabile per approssimare α_2

Per determinare un punto iniziale x_0 che garantisca la convergenza della successione, si osserva che $f(2) > 0$ e $f(5) < 0$ quindi $\alpha_2 \in [2,5]$. Inoltre, *per ogni* $x \in [2,5]$ si ha

$$0 < h'(x) < \frac{1}{2}$$

dunque

qualsiasi $x_0 \in [2,5]$ *garantisce che la successione generata è monotona e convergente a* α_2

`Problema 3`

(a) La matrice A si ottiene effettuando la moltiplicazione:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Ricordando la definizione di fattorizzazione QR di una matrice, ed osservando che le colonne del fattore sinistro S (elementi di $\mathbf{R}^3$ con prodotto scalare canonico) sono ortogonali ma *non hanno norma unitaria* (ovvero che S *non è* ortogonale), si conclude che

S, D non è una fattorizzazione QR di A

(b) Effettuando la moltiplicazione si ha

$$S^{\mathsf{T}}S = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Per calcolare l'inversa di S (che esiste certamente perché ...) si procede a partire dalla definizione: si deve determinare la $X \in \mathbf{R}^3$ tale che $SX = I$, ovvero (moltiplicando a sinistra per S^{T}) tale che $(S^{\mathsf{T}}S)X = S^{\mathsf{T}}$. Perciò:

$$S^{-1} = (S^{\mathsf{T}}S)^{-1}S^{\mathsf{T}} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(c) Infine, per calcolare l'inversa di A (che esiste certamente perché ...) si procede come sopra: si deve determinare la $X \in \mathbf{R}^3$ tale che $AX = I$, ovvero tale che $SDX = I$ moltiplicando a sinistra prima per S^{-1} poi per D^{-1} si ottiene $X = D^{-1}S^{-1}$. Per calcolare l'inversa di D si risolvono ("all'indietro": la matrice dei sistemi è triangolare superiore!) i sistemi $Dx = e_1, Dx = e_2$ e $Dx = e_3$ ottenendo le colonne dell'inversa:

$$D^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

(che risulta anch'essa triangolare superiore ...). Infine, effettuando la moltiplicazione:

$$A^{-1} = D^{-1}S^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & -3 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$