



Analisi II e Calcolo Numerico
Corso di Laurea in Ingegneria Elettronica

Appello del 31 maggio 2004

Problema 1

Sia $a = 7$. Determinare l'insieme

$$B = \{ b \in \mathbf{R} \text{ tali che } |\frac{a-b}{b}| \leq \frac{1}{10} \}$$

Problema 2

Sia

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^{3 \times 3}$$

Determinare $\|A\|_2$.

Problema 3

Determinare tutti gli elementi di $P_4(\mathbf{R})$ che interpolano i dati $(-1, 1), (0, 1), (1, 1)$.

Soluzione

Problema 1

Si ha

$$B = \left[\frac{70}{11}, \frac{70}{9} \right]$$

Problema 2

Si ricordi che

$$\|A\|_2 = \sqrt{\rho(A^T A)}$$

Si ha

$$A^T A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e, essendo

$$\det \begin{pmatrix} 4 - \lambda & 2 \\ 2 & 2 - \lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - 6\lambda + 4$$

si ottiene

$$\sigma(A^T A) = \{1, 3 + \sqrt{5}, 3 - \sqrt{5}\}$$

da cui

$$\rho(A^T A) = 3 + \sqrt{5}$$

e quindi

$$\|A\|_2 = \sqrt{3 + \sqrt{5}}$$

Problema 3

Utilizzando $1, x, x^2, x^3, x^4$ come base di $P_4(\mathbf{R})$ ed imponendo le condizioni di interpolazione si ottiene il sistema

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

le cui soluzioni sono

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

e quindi gli elementi cercati risultano

$$\{1 + \alpha(x - x^3) + \beta(x^2 - x^4); \alpha, \beta \in \mathbf{R}\} = \{1 + x(1 - x^2)(\alpha + \beta x); \alpha, \beta \in \mathbf{R}\}$$