Dipartimento di Matematica Applicata
« Ulisse Dini »

Analisi II e Calcolo Numerico

Corso di Laurea in Ingegneria Elettronica

Appello del 3 giugno 2003

programma a.a. 2002/2003

`Problema 1`

Sia $M = F(10, 12, -498, 500)$. Per approssimare la funzione $f(x) = \frac{1}{1+x}$, si considera la funzione ϕ definita da $\phi(\xi) = 1 \oslash (1 \oplus \xi)$.

(1) Indicare l'insieme di definizione di ϕ.

(2) Stimare, per $\xi \in [0, 1] \cap M$, l'errore algoritmico

$$\epsilon_a = \frac{\phi(\xi) - f(\xi)}{f(\xi)}$$

in termini di precisione di macchina u.

(3) Calcolare la funzione di condizionamento per il problema del calcolo di f in x.

`Problema 2`

Sia $f(t) = \frac{1}{1+t}$ e si considerino i dati

$$(t_j, f(t_j)) \quad , \quad t_j = \frac{1}{2} j \quad , \quad j = 0, 1, 2$$

(1) Determinare l'elemento $p_2 \in P_2(\mathbf{R})$ che interpola i dati.

(2) Stimare

$$\sup_{t\in[0,1]} |f(t) - p_2(t)|$$

Siano $[a, b] = [0, 1]$ ed F la funzione ottenuta mediante interpolazione composita con $k = 1$ e $N = 2$ a partire dai campioni di f.

(3) Disegnare il grafico di F.

(4) Stimare

$$\sup_{t\in[0,1]} |f(t) - F(t)|$$

e decidere, di conseguenza, quale tra p_2 ed F approssima meglio f in $[0, 1]$.

Dipartimento di Matematica Applicata
« Ulisse Dini »

Analisi II e Calcolo Numerico

Corso di Laurea in Ingegneria Elettronica

Appello del 3 giugno 2003

programma a.a. 2001/2002

`Problema 1`

Sia $M = F(10, 12, -498, 500)$. Per approssimare la funzione $f(x) = \frac{1}{1+x}$, si considera la funzione ϕ definita da $\phi(\xi) = 1 \oslash (1 \oplus \xi)$.

(1) Indicare l'insieme di definizione di ϕ.

(2) Stimare, per $\xi \in [0, 1] \cap M$, l'errore algoritmico

$$\epsilon_a = \frac{\phi(\xi) - f(\xi)}{f(\xi)}$$

in termini di precisione di macchina u.

`Problema 2`

Sia $h(x) = \frac{1}{1+x}$.

(1) Determinare i punti uniti di h.

Per approssimare i punti uniti di h si utilizza il metodo iterativo ad un punto definito da h.

(2) Per ciascuno dei punti uniti di h, decidere se il metodo è utilizzabile per la sua approssimazione e, eventualmente, descrivere una procedura che consenta l'approssimazione con errore assoluto non superiore a 10^{-2}.

Soluzione

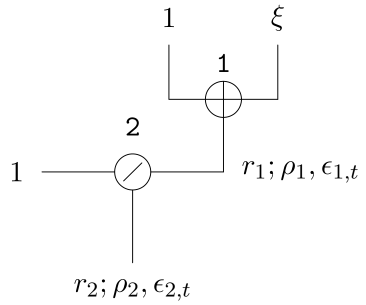
`Problema 1`

(1) L'insieme di definizione di ϕ è $\{\xi \in M$ tali che $1 \oplus \xi \neq 0\}$. Poiché $1 \oplus \xi = \mathrm{rd}(1+\xi)$, l'insieme richiesto è

$$\{\xi \in M \text{ tali che } \xi \notin (-1 - \tfrac{1}{2}\xi_m, -1 + \tfrac{1}{2}\xi_m)\}$$

Siccome $\sigma(-1) > -1 + \frac{1}{2}\xi_m$ e $\pi(-1) < -1 - \frac{1}{2}\xi_m$, allora l'insieme di definizione risulta $M \setminus \{-1\}$.

(2) Con riferimento alla figura si ha



$$\epsilon_{1,t} \begin{cases} |\epsilon_{1,a}| \le u \\ \epsilon_{1,d} = 0 \end{cases} \quad , \quad \epsilon_{2,t} \begin{cases} |\epsilon_{2,a}| \le u \\ \epsilon_{2,d} = -\frac{\epsilon_{1,t}}{1+\epsilon_{1,t}} \end{cases}$$

(si osservi che r_1 ed $r_2 \ldots$).

Si ha allora $|\epsilon_{1,t}| \le u, |\epsilon_{2,d}| \le \frac{u}{1-u}$ e quindi

$$|\epsilon_{2,t}| \le \frac{2u}{1-u} \approx 10^{-11}$$

(3) Per la funzione di condizionamento, operando con gli errori relativi, si ha

$$\epsilon_d = \frac{f(\hat{x}) - f(x)}{f(x)} = \frac{x - \hat{x}}{1 + \hat{x}}$$

Ponendo $\hat{x} = x(1 + \epsilon_1)$ si ottiene infine

$$\epsilon_d = -\frac{\epsilon_1 x}{1 + x + \epsilon_1 x}$$

Operando con gli errori assoluti, si ha invece

$$\delta_d = f(\hat{x}) - f(x) = \frac{x - \hat{x}}{(1+x)(1+\hat{x})}$$

e, ponendo $\hat{x} = x + \delta_1$ si ottiene infine

$$\delta_d = -\frac{\delta_1}{(1+x)(1+x+\delta_1)}$$

`Problema 2` (a.a. 2002/2003)

(1) La forma di Newton del polinomio interpolante è

$$p_2(t) = 1 - \tfrac{2}{3}t + \tfrac{1}{3}t(t - \tfrac{1}{2})$$

(2) Per ogni $t \in [0,1]$ esiste $\theta \in [0,1]$ tale che

$$f(t) - p_2(t) = \frac{f^{(3)}(\theta)}{6} t(t - \tfrac{1}{2})(t-1)$$

Poiché

$$f^{(j)}(t) = (-1)^j \frac{j!}{(1+t)^{j+1}} \quad , \quad \sup_{t\in[0,1]} |f^{(j)}(t)| = j!$$

e

$$\sup_{t\in[0,1]} |t(t - \tfrac{1}{2})(t-1)| = \frac{1}{12\sqrt{3}}$$

si ha

$$\sup_{t\in[0,1]} |f(t) - p_2(t)| \leq \frac{1}{12\sqrt{3}}$$

(4) Per la funzione F, operando come nell'Esempio 4.14 degli Appunti, si ottiene

$$\sup_{t\in[0,1]} |f(t) - F(t)| \leq \frac{1}{16}$$

Poiché $\frac{1}{12\sqrt{3}} < \frac{1}{16} \ldots$

`Problema 2` (a.a. 2001/2002)

(1) I punti uniti della funzione h sono gli x tali che

$$x = \frac{1}{1+x}$$

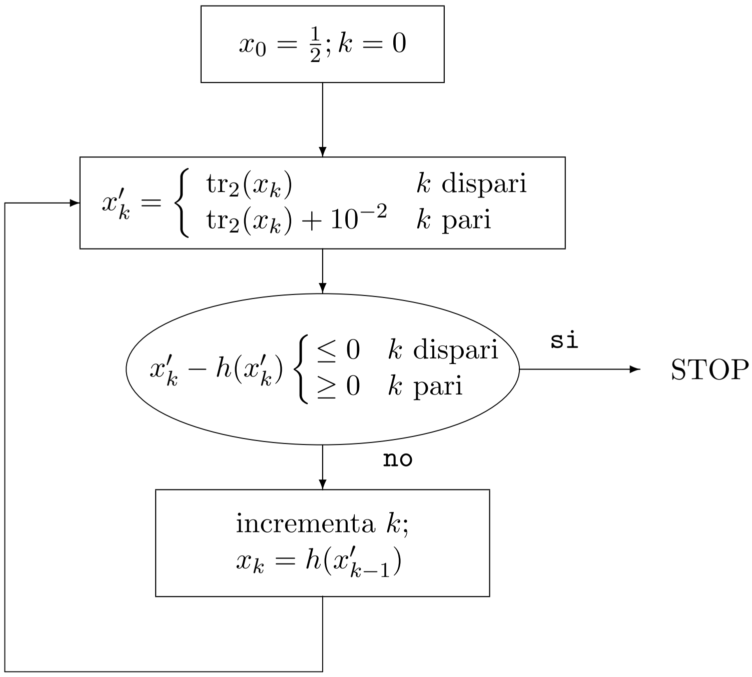
cioè: $x_1 = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}, x_2 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$.

(2) Per x_1 si ha $h'(x_1) = -\frac{2}{3-\sqrt{5}}$. Siccome $|h'(x_1)| > 1$, il metodo proposto non è utilizzabile per approssimare x_1.

Per x_2, invece, si ha $h'(x_2) = -\frac{2}{3+\sqrt{5}}$. Siccome $|h'(x_1)| < 1$, il metodo proposto è utilizzabile per approssimare x_2.

Poiché $x_2 \in [\frac{1}{2}, 1]$ e in tale intervallo si ha $-1 < h'(x) < 0$, una successione convergente ad x_2 si ottiene partendo da $x_0 = \frac{1}{2}$ (estremo dell'intervallo $[\frac{1}{2}, 1]$ più vicino ad x_2) e tale successione risulta composta da valori minori di x_2 per indice pari, maggiori per indice dispari.

Una procedura per approssimare x_2 con l'errore richiesto è quindi


$x_0 = \frac{1}{2}; k = 0$
$x'_k = \begin{cases} \mathrm{tr}_2(x_k) & k \text{ dispari} \\ \mathrm{tr}_2(x_k) + 10^{-2} & k \text{ pari} \end{cases}$
$x'_k - h(x'_k) \begin{cases} \leq 0 & k \text{ dispari} \\ \geq 0 & k \text{ pari} \end{cases}$
si
STOP
no
incrementa k;
$x_k = h(x'_{k-1})$