Dipartimento di Matematica Applicata
« Ulisse Dini »

Calcolo Numerico

Corso di Laurea in Ingegneria Elettronica a.a. 2001/2002

Appello del 21 giugno 2002

`Problema 1`

Sia $M = F(10, 3, -5, 5)$. Dette $\mathrm{tr} : \mathbf{R} \to M$ la funzione troncamento e $\mathrm{rd} : \mathbf{R} \to M$ la funzione arrotondamento, si considerino le pseudo–operazioni definite da

$$\xi_1 \oplus \xi_2 = \mathrm{rd}(\xi_1 + \xi_2)$$
$$\xi_1 \boxplus \xi_2 = \mathrm{tr}(\xi_1 + \xi_2)$$

Determinare

$$\theta_1 = \min\{\xi \in M \text{ tali che } 1 \oplus \xi > 1\}$$
$$\theta_2 = \min\{\xi \in M \text{ tali che } 1 \boxplus \xi > 1\}$$

`Problema 2`

Sia $W = \{\text{polinomi a coefficienti reali di grado} \leq 2\}$.

Determinare i valori di $\beta \in \mathbf{R}$ per i quali l'insieme

$$S(\beta) = \{g \in W \text{ tali che } g(0) = 0, g(2) = 0, g'(\beta) = 0\}$$

ha almeno due elementi.

Determinare infine l'elemento di $S(1)$ che meglio approssima i dati $(1, 1), (\frac{1}{2}, 0)$ nel senso dei minimi quadrati.

`Problema 3`

Sia

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \alpha e_{10}^T \\ e_1 & \beta I \end{bmatrix} \in \mathbf{R}^{11\times 11}$$

con $e_1, \ldots, e_{10}$ base canonica di $\mathbf{R}^{10}$ e $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$.

Determinare i valori di α e β per i quali il metodo iterativo di Jacobi, per il sistema $Ax = b$, risulta convergente.

Dipartimento di Matematica Applicata
« Ulisse Dini »

Calcolo Numerico

Corso di Laurea in Ingegneria Elettronica a.a. 1999/2000

Appello del 21 giugno 2002

`Problema 1`

Determinare una fattorizzazione QR della matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & i \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbf{C}^{2\times 2}$$

`Problema 2`

Sia $W = \{\text{polinomi a coefficienti reali di grado } \leq 2\}$.

Determinare i valori di $\beta \in \mathbf{R}$ per i quali l'insieme

$$S(\beta) = \{g \in W \text{ tali che } g(0) = 0, g(2) = 0, g'(\beta) = 0\}$$

ha almeno due elementi.

Determinare infine l'elemento di $S(1)$ che meglio approssima i dati $(1, 1), (\frac{1}{2}, 0)$ nel senso dei minimi quadrati.

`Problema 3`

Sia

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \alpha e_{10}^T \\ e_1 & \beta I \end{bmatrix} \in \mathbf{R}^{11\times 11}$$

con $e_1, \ldots, e_{10}$ base canonica di $\mathbf{R}^{10}$ e $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$.

Determinare i valori di α e β per i quali il metodo iterativo di Jacobi, per il sistema $Ax = b$, risulta convergente.

Soluzione

`Problema 1` (a.a. 2001/2002)
Poiché $\sigma(1) = 10^1\, 0.101$, si ha

$$1 \oplus \xi > 1 \Leftrightarrow \mathrm{rd}\,(1+\xi) > 1 \Leftrightarrow 1+\xi \geq 10^1\, 0.1005$$

Dunque $\xi \geq 0.005$ e $\theta_1 = 10^{-2}\, 0.500$.

Analogamente:

$$1 \boxplus \xi > 1 \Leftrightarrow \mathrm{tr}\,(1+\xi) > 1 \Leftrightarrow 1+\xi \geq 10^1\, 0.101$$

Dunque $\xi \geq 0.01$ e $\theta_2 = 10^{-1}\, 0.100$.

`Problema 1` (a.a. 1999/2000)
Utilizzando il procedimento di ortonormalizzazione di Gram–Schmidt si ottiene

$$\begin{aligned} q_1 &= \tfrac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \\ q_2 &= \tfrac{v_2-(v_2\bullet q_1)q_1}{||v_2-(v_2\bullet q_1)q_1||} = \tfrac{i}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

e, posto $Q = (q_1, q_2)$, una fattorizzazione QR si ricava ponendo

$$R = Q^H A = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & i/\sqrt{2} \\ 0 & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

`Problema 2`
Un elemento di W è della forma $g(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2$ con a_0, a_1, a_2 reali. L'insieme $S(\beta)$ ha almeno due elementi se e solo se il sistema ottenuto imponendo le condizioni richieste ha almeno due soluzioni. Tale sistema risulta

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 2\beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

ed ha almeno due soluzioni se e solo se $\beta = 1$ (la matrice risulta altrimenti non singolare). In tal caso le soluzioni del sistema sono

$$\ker \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \langle \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} \rangle$$

e si ha $S(1) = \{\alpha\,(2t - t^2), \alpha \in \mathbf{R}\}$.

L'elemento richiesto di $S(1)$ si può ottenere trasformano il problema nella ricerca delle soluzioni nel senso dei minimi quadrati del sistema di equazioni ottenuto imponendo le relazioni di interpolazione:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 3/4 \end{bmatrix} \alpha = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Si ottiene $\alpha = 16/25$ e l'elemento richiesto è $\frac{16}{25}\,(2t - t^2)$.

`Problema 3`

Il metodo di Jacobi non è definito per $\beta = 0$. Altrimenti la matrice di iterazione del metodo è

$$H_J = \left[\begin{array}{cc} 0 & -\alpha e_{10}^T \\ -\frac{1}{\beta} e_1 & 0 \end{array} \right]$$

Il polinomio caratteristico di H_J (calcolato, ad esempio, mediante uno sviluppo di Laplace) è $-\lambda^{11}$. Il raggio spettrale di H_J vale dunque 0. Il metodo risulta convergente per ogni α reale e per ogni β reale non nullo.