**Dipartimento di Matematica Applicata**
**« Ulisse Dini »**

# Analisi II e Calcolo Numerico

**Corso di Laurea in Ingegneria Elettronica**

Appello del 18 giugno 2002

`Problema 1`

Sia $M = F(2, 2, -10, 10)$. Posto $\xi = \mathrm{rd}(\frac{1}{3})$

(a) determinare $\xi$;

(b) decidere se $3 \otimes \xi \leq 1$.

`Problema 2`

Per ogni $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, si indichi con $\mathcal{U}(f)$ l'insieme dei punti uniti di $f$.

(a) Posto $\mathcal{G} = \langle 1, t^2 \rangle$, determinare l'elemento $h \in \mathcal{G}$ tale che $\mathcal{U}(h) = \{1, 2\}$.

(b) Si consideri il metodo iterativo ad un punto definito dalla funzione $h$ :

$$x_{k+1} = h(x_k)$$

Determinare l'insieme

$$X = \{x_0 \in \mathbf{R} \text{ tali che la successione generata dal metodo converge a } 1\}$$

`Problema 3`

Si consideri $\mathbf{R}^2$ con prodotto scalare canonico, e sia $v = (3, 1)^T$. Detta $p : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ l'applicazione definita da

$$p(x) = \text{il complemento ortogonale di } x \text{ relativo a } v$$

si determini $P \in \mathbf{R}^{2\times 2}$ tale che, per ogni $x \in \mathbf{R}^2$, si abbia $p(x) = Px$.

Infine, si determini $\ker P$.

Soluzione

`Problema 1`

Poiché $\frac{1}{3} = 2^{-1}\,0.101\ldots$, si ha $2^{-1}\,0.10 < \frac{1}{3} < 2^{-1}\,0.11$. Inoltre $2^{-1}\,0.101 < \frac{1}{3}$ e quindi $\xi = 2^{-1}\,0.11 = 3/8$.

Infine:

$$3 \otimes \xi = \mathrm{rd}(3\xi) = \mathrm{rd}(9/8)$$

Poiché $1 = 2^1\,0.10 < \frac{9}{8} < 2^1\,0.11$ e $\frac{9}{8} < 2^1\,0.101$, si ha $3 \otimes \xi = 1$.

`Problema 2`

Si cercano $a_0$ e $a_2$ reali tali che, posto $h(t) = a_0 + a_2\,t^2$, sia $h(1) = 1, h(2) = 2$. Imponendo le condizioni e risolvendo il sistema (che risulta avere una sola soluzione — come suggerito dal testo) si ottiene

$$h(t) = \frac{2 + t^2}{3}$$

Infine, operando graficamente, si ottiene $X = (-2, 2)$. Per $x_0 \in \{-2, 2\}$ si ottiene una successione definitivamente uguale a 2, per $x_0 \notin [-2, 2]$ si ottiene una successione tale che $\lim_{k\to\infty} x_k = \infty$.

`Problema 3`

Sia $x = (x_1, x_2)^T \in \mathbf{R}^2$. Il complemento ortogonale di $x$ relativo a $v$ è $\omega = x - \dfrac{x \bullet v}{||v||^2}\,v$. Si ha

$$\omega = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} - \frac{3x_1 + x_2}{10} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{10}x_1 - \frac{3}{10}x_2 \\ -\frac{3}{10}x_1 + \frac{9}{10}x_2 \end{bmatrix}$$

Quindi

$$P = \begin{bmatrix} \frac{1}{10} & -\frac{3}{10} \\ -\frac{3}{10} & \frac{9}{10} \end{bmatrix}$$

e

$$\ker P = \langle \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} \rangle$$

Si osservi che $\ker P = \langle v \rangle$.