Dipartimento di Matematica Applicata
« Ulisse Dini »

Calcolo Numerico

Corso di Laurea in Ingegneria Elettronica, programma 2001/2002

Appello del 30 maggio 2002

`Problema 1`

Sia $M = F(10, 3, -9, 9)$.

Detta $\pi : M \setminus \{-\xi_M\} \to M$ la funzione predecessore ed u la precisione di macchina, calcolare la $\pi(1)$ ed u.

Decidere, infine, se $\pi(1) \oplus u > 1$.

`Problema 2`

Si considerino i due insiemi di dati

$$\begin{array}{ll} (a) & (6, \alpha_1),\ (7, \alpha_2) \\ (b) & (1, \beta_1),\ (3, \beta_2) \end{array}$$

con $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ reali assegnati.

Si discuta il problema dell'interpolazione dei dati in $\mathcal{G} = \langle 1, t \rangle$.

Decidere quale dei due problemi risulta caratterizzato da un condizionamento migliore.

`Problema 3`

Sia

$$A = \begin{bmatrix} J & e_1 \\ e_1^T & 2 \end{bmatrix} \in \mathbf{R}^{73 \times 73}$$

con $e_1, \ldots, e_{72}$ base canonica di $\mathbf{R}^{72}$ e $J = (e_{72}, e_{71}, \ldots, e_1)$.

Determinare una fattorizzazione LR a blocchi di A e calcolare $\det A$.

Dipartimento di Matematica Applicata
« Ulisse Dini »

Calcolo Numerico

Corso di Laurea in Ingegneria Elettronica, programma 1999/2000

Appello del 30 maggio 2002

`Problema 1`

Per approssimare il valore dell'integrale

$$I(f) = \int_0^2 f(x)\,dx$$

si utilizza una formula di quadratura della forma

$$J(f) = a_0 f(0) + a_1 f'(1) + a_2 f(2)$$

Determinare i valori di a_0, a_1 ed a_2 che rendono massimo il grado di precisione della formula.

`Problema 2`

Si considerino i due insiemi di dati

$$\begin{array}{ll} (a) & (6,\alpha_1),\ (7,\alpha_2) \\ (b) & (1,\beta_1),\ (3,\beta_2) \end{array}$$

con $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ reali assegnati.

Si discuta il problema dell'interpolazione dei dati in $\mathcal{G} = \langle 1, t \rangle$.

Decidere quale dei due problemi risulta caratterizzato da un condizionamento migliore.

`Problema 3`

Sia

$$A = \begin{bmatrix} J & e_1 \\ e_1^T & 2 \end{bmatrix} \in \mathbf{R}^{73\times 73}$$

con $e_1, \ldots, e_{72}$ base canonica di $\mathbf{R}^{72}$ e $J = (e_{72}, e_{71}, \ldots, e_1)$.

Determinare una fattorizzazione LR a blocchi di A e calcolare $\det A$.

Soluzione

`Problema 1` (a.a. 2001/2002)

Si ha

$$\pi(1) = 0.999\,10^0 = 0.999 \quad , \quad u = \frac{1}{2}\,10^{1-3} = 0.005$$

Infine:

$$\pi(1) \oplus u = \mathrm{rd}\,(0.999 + 0.005) = \mathrm{rd}\,(1.004) = \mathrm{rd}\,(0.1004\,10^1)$$

Siccome $\mathrm{rd}\,(0.1004\,10^1) = 0.100\,10^1 = 1$, l'asserto è falso.

`Problema 1` (a.a. 1999/2000)

Imponendo l'annullarsi dell'errore per $1, x, x^2$ si ottengono le relazioni

$$\begin{array}{ll} I(1) = 2 & , \quad J(1) = a_0 + a_2 \\ I(x) = 2 & , \quad J(x) = a_1 + 2a_2 \\ I(x^2) = \frac{8}{3} & , \quad J(x^2) = 2a_1 + 4a_2 \end{array}$$

che risultano incompatibili: non ci sono valori dei pesi che producono formule di quadratura con grado di precisione almeno 2.

Dalle prime due relazioni si ottiene $a_0 = 2 - a_2, a_1 = 2 - 2a_2$. Tutte le formule che si ottengono scegliendo $a_2 \in \mathbf{R}$ hanno grado di precisione 1.

`Problema 2`

Il problema dell'interpolazione dei dati è equivalente allo studio dei sistemi ottenuti esplicitando le condizioni di interpolazione. Le matrici dei sistemi risultano (nei due casi rispettivamente)

$$M_a = \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 1 & 7 \end{bmatrix} \quad , \quad M_b = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Entrambe le matrici sono non singolari, e quindi i problemi di interpolazione hanno soluzione unica per ogni scelta di $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$.

Per studiare il condizionamento del problema della determinazione dei coefficienti di 1 e t, si determina il numero di condizionamento delle matrici. Scelta la norma infinito si ha

$$\mu_\infty(M_a) = 104 \quad , \quad \mu_\infty(M_b) = 8$$

Per i dati (a) il problema *può* risultare mal condizionato. Per i dati (b), invece, il problema risulta sicuramente non mal condizionato.

`Problema 3`

Utilizzando (ad esempio) il metodo di Doolittle, la fattorizzazione LR a blocchi di A risulta

$$L = \begin{bmatrix} I & 0 \\ e_{72}^T & 1 \end{bmatrix} \quad , \quad R = \begin{bmatrix} J & e_1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Il determinante di A è quindi

$$\det A = \det L \;\det R = \det R = 2 \,\det J$$

Poiché la matrice $J \in \mathbf{R}^{72\times 72}$ si ottiene dalla matrice identica operando 36 scambi di colonne, si ha $\det J = 1$. Allora: $\det A = 2$.