Dipartimento di Matematica Applicata
« Ulisse Dini »

Analisi II e Calcolo Numerico

Corso di Laurea in Ingegneria Elettronica, I anno

Appello del 27 maggio 2002

`Problema 1`

Sia

$$A(x) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & x \\ 1 & x & 1 \end{bmatrix} \in \mathbf{R}^{3\times 3}$$

Determinare gli insiemi

$$F = \{x \in \mathbf{R} \text{ tali che } A(x) \text{ è fattorizzabile LR}\}$$

$$D = \{x \in \mathbf{R} \text{ tali che } A(x) \text{ è definita positiva}\}$$

`Problema 2`

Sia $M = F(10, 3, -9, 9)$.

Calcolare la precisione di macchina u, il massimo numero di macchina ξ_M ed il minimo numero di macchina positivo ξ_m.

Calcolare, infine, $1 \oslash \xi_m$.

`Problema 3`

Sia $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ definita da

$$f(t) = 10(1 - 2t) - e^t$$

Determinare il numero di zeri di f e separarli.

Per approssimare gli zeri, si usa il metodo di Newton. Per ciascuno zero, individuare (se esiste) un punto iniziale che garantisce la convergenza della successione, e specificare (se è il caso) l'andamento qualitativo della successione corrispondente al punto iniziale individuato.

Soluzione

`Problema 1`

Poiché $a_{11} \neq 0$, dal primo passo dell'eliminazione si ottiene

$$A^{(2)}(x) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & x-1 \\ 0 & x-1 & 0 \end{bmatrix}$$

Poiché $a_{22}^{(2)} \neq 0$, dal secondo passo ... si ottiene

$$R(x) = A^{(3)}(x) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & x-1 \\ 0 & 0 & -(x-1)^2 \end{bmatrix}$$

Allora: l'eliminazione termina per ogni $x \in \mathbf{R}$ e, poiché $A(x)$ è definita positiva se e solo se l'eliminazione di Gauss termina e gli elementi sulla diagonale di $R(x)$ sono tutti positivi, si ha $D = \emptyset$.

`Problema 2`

Si ha

$$u = \frac{1}{2}\, 10^{1-3} = 0.005 \quad \xi_M = 0.999\, 10^9 = 999\, 10^6 \xi_m = 0.100\, 10^{-9} = 10^{-10}$$

Infine, poiché $10^{10} > \xi_M$:

$$1 \oslash \xi_m = \mathrm{rd}(1/\xi_m) = \mathrm{rd}(10^{10}) = \xi_M$$

`Problema 3`

La fuzione f ha un solo zero. Infatti si ha $f'(t) < 0$ per ogni $t \in \mathbf{R}$, e

$$\lim_{t\to-\infty} f(t) = \infty \quad , \quad \lim_{t\to\infty} f(t) = -\infty$$

Detto α lo zero, si ha $\alpha \in [0, 1/2]$.

Il metodo di Newton è sicuramente applicabile (infatti $f'(t) \neq 0$ per ogni t), ed un punto iniziale che garantisce convergenza è $t_0 = 1/2$. Infatti, per ogni $t \in \mathbf{R}$ si ha $f''(t) < 0$. La successione generata a partire da t_0 è (di conseguenza) monotona decrescente.

Poiché risulta anche $f''(\alpha) \neq 0$, il metodo ha ordine di convergenza ad α pari a 2.