Es: determinare gli elementi di $P_1(\mathbb{R})$ che meglio approssimano i dati $(-1,0)$, $(0,0)$, $(1,1)$ nel senso dei m.q

Sol: cerco $g \in P_1(\mathbb{R})$ che rende minima la quantità

$$(g(-1)-0)^2 + (g(0)-0)^2 + (g(1)-1)^2$$

(graficamente ...)

- $(g(-1)-0)^2 + (g(0)-0)^2 + (g(1)-1)^2 = \left\| \begin{bmatrix} g(-1) \\ g(0) \\ g(1) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\|^2$

  (norma ottenuta dal ps canonico in $\mathbb{R}^3$)

- Scelto $P_1(\mathbb{R}) = \langle 1, t \rangle$ si ha

$$\begin{bmatrix} g(-1) \\ g(0) \\ g(1) \end{bmatrix} = a_0 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + a_1 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

- Riformulazione: $V = \mathbb{R}^3$ con ps canonico, $v = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

  $W = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$

  cerco coeff della comb lin in W che meglio approx v nel senso dei mq

  ovvero: cerco soluz nel senso dei mq del sistema

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Oss: è il sist da studiare per l'interpolazione!

- Eq.ni normali ...

Es: determ fatt QR di $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 2}$

Oss: ovvero...

Sol: $A = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{3} & 0 \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{3} & 0 \\ 0 & \sqrt{2} \end{bmatrix}$

Oss: $A \in \mathbb{R}^{n\times k}$, colonne indip, $b \in \mathbb{R}^n$

- SE U, T fatt QR di A, ALLORA

  I) $A^T A = T^T T$

  II) $A^T b = T^T U^T b$

  III) $A^T A x = A^T b$ equiv a $Tx = U^T b$

Es: utilizz fatt QR di A dell'es precedente per determ la sol del sist $Ax = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ nel senso dei mq.

Oss: $A = (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^{n\times 2}$ t.c. $\|a_1\| = 1$, $\|a_2\| = \lambda > 1$, $a_1 \cdot a_2 = 0$;

Si ha:

- $A^T A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \lambda^2 \end{pmatrix}$, $\|A^T A\|_2 = \lambda^2$
- $(A^T A)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/\lambda^2 \end{pmatrix}$, $\|(A^T A)^{-1}\|_2 = 1$

  $\Rightarrow \boxed{\mu_2(A^T A) = \lambda^2}$

Inoltre:

- $\left(a_1, \frac{a_2}{\lambda}\right)$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ è fatt QR di A

  T
- $\|T\|_2 = \lambda$, $\|T^{-1}\|_2 = 1 \Rightarrow \boxed{\mu_2(T) = \lambda}$

Risultato generale: $\mu_2(T) = \sqrt{\mu_2(A^T A)}$

... i sistemi $A^T A x = A^T b$ e $Tx = U^T b$ sono equiv MA il secondo ha una matrice con condizionam migliore del primo!