CN [47] [48] 15 maggio 2008 / C01

def: V sp vett con ps; W ssv di V, dim $W < \infty$; $v \in V$

$w \in W$ t.c. $\forall x \in W$, $\|v - x\|^2 \geq \|v - w\|^2$; — w MIGLIORE APPROSS di v in W nel senso dei MIN QUAD

TEO: $\exists!$ migl appross di v in W nel senso dei MIN QUAD: la proiez ortogonale di v su W.

(dim: ...)

def: v^* = pr ort di v su W; $\|v - v^*\|^2$ RESIDUO QUADRATICO

Pb: come calcolare la migl appross...

Oss: $W = \langle w_1, \dots, w_k \rangle$; $v \in V$, $w \in W$

- w è pr ort di v su W $\iff$ $v - w \perp W$
- $v - w \perp W \iff \forall j = 1, \dots, k$ si ha $(v - w) \cdot w_j = 0$ ovvero $v \cdot w_j = w \cdot w_j$
- posto $w = a_1 w_1 + \dots + a_k w_k$, i coeff individuano pr ort $\iff \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_k \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^k$ risolve $\begin{bmatrix} w_1 \cdot w_1 & \cdots & w_k \cdot w_1 \\ \vdots & & \vdots \\ w_1 \cdot w_k & \cdots & w_k \cdot w_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v \cdot w_1 \\ \vdots \\ v \cdot w_k \end{bmatrix}$ EQUAZIONI NORMALI
- la matr del sist eq normali è SIMMETRICA.
- SE $w_1, \dots, w_k$ lin indip ALLORA matr invertibile ($\exists!$ soluzione) ALTRIMENTI $\exists$ infinite soluzioni.
- soluzione delle eq. normali: COORDINATE della pr ort rispetto $w_1, \dots, w_k$.

Es: $V = \mathbb{R}^3$ con ps canonico, $v = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$; $W = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle$

- eq normali
- soluzioni delle eq normali
- migl appross di v in W (pr ort di v su W)

Es (per casa): V, v come sopra; $W = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle$ etc.

Es: $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, $b = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$; cerco $x^* \in \mathbb{R}^2$ t.c. $\forall x \in \mathbb{R}^2$, $\|Ax - b\|_2^2 \geq \|Ax^* - b\|_2^2$

Rilettura: $V = \mathbb{R}^3$ con ps canonico, $W = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle$, $v = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$; cerco la migliore appross di v in W nel senso dei min quad.

Sol: usando rilettura... eq normali: $A^T A x = A^T b$ $(a \cdot b = b^T a)$ etc.

Es: $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$; $\hat{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$, $\hat{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$

- calcolare sol nel senso dei mq di $Ax = b$ e $\hat{A}x = \hat{b}$

Oss: le sol sono diverse ma i sist sono equivalenti (ovvero...)

Es: $A \in \mathbb{R}^{n \times k}$, $n \geq k$, $b \in \mathbb{R}^n$; colonne di A lin indip.

- LA sol di $Ax = b$ nel senso dei mq è

$$x^* = \boxed{(A^T A)^{-1} A^T} b$$

PSEUDOINVERSA di A (A^+)

- se $k = n$ si ha $(A^T A)^{-1} A^T = A^{-1}$.
- $A (A^T A)^{-1} A^T : b \longrightarrow$ pr ort di b su $\langle a_1, \dots, a_k \rangle$