CN $\boxed{44}$ $\boxed{45}$ 10 maggio 2008 / B11

<u>def</u> (f cont lin a tratti): $a = t_0 < \dots < t_k = b$

$I_j = [t_{j-1}, t_j]$, $j = 1, \dots, k$; $f \in S$ SE < continua ; $\forall j\ \exists\, p_j \in P_1(\mathbb{R})$ t.c. $f = p_j$ su I_j

INS delle FUNZIONI CONTINUE LINEARI a TRATTI (su $I_1, \dots, I_k$)

<u>Oss</u>: (1) S è ssv di $C(a,b)$;

(2) dati $y_0, \dots, y_k \in \mathbb{R}$, $\exists!\ \sigma \in S$ che interpola i dati $(t_0, y_0), \dots, (t_k, y_k)$

(<u>dim</u>: $\forall j$, $\exists!$ elem di $P_1(\mathbb{R})$ che int $(t_{j-1}, y_{j-1}), (t_j, y_j)$)

(3) $s_0, \dots, s_k \in S$ t.c. $s_j(t_i) = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases}$

sono BASE di S (dim ...)

e q.di: dim S = k+1

<u>Es</u>: $t_j = 0, 1, 2, 4, 5$;

- determ I_j;
- disegnare grafico $s_0, \dots, s_4$;
- determ l'elem di S che int i dati $(0,3), (1,0), (2,-1), (4,0), (5,2)$.

<u>Oss</u> (ricostr otten mediante f cont lin a tratti)

dati: $t_0 < t_1 < \dots < t_k$, S ins delle f cont lin a tratti su...

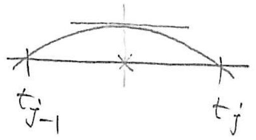
- $r: \mathbb{R}^{k+1} \to C(t_0, t_k)$ t.c. $r(y_0, \dots, y_k)^T$ = l'elem di S che int i dati $(t_0, y_0), \dots, (t_k, y_k)$.

(1) r è f di ricostr nel a c (... OTTENUTA MEDIANTE F CONT LIN A TRATTI)

(2) $f \in C^2(t_0, t_k)$; $M_2 = \max_{[t_0, t_k]} |f^{(2)}|$

l'elem di $P_1(\mathbb{R})$ che int...

$t \in I_j$: $|f(t) - r(c(f))| = |f(t) - p_j(t)| \le$



$$\le \frac{M_2}{2} |t - t_{j-1}| |t - t_j| \le \frac{M_2}{2} \left(\frac{t_j - t_{j-1}}{2} \right)^2$$

$\Rightarrow$ posto $h = \max\{t_1 - t_0, \dots, t_k - t_{k-1}\}$

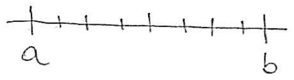
si ha $\boxed{e(f) \le \frac{M_2}{8} h^2}$

<u>SE</u> criterio per aumentare # int camp è t.c. $\lim_{k \to \infty} h = 0$

<u>ALLORA</u> $\lim_{k \to \infty} e(f) = 0$

<u>Es</u>:

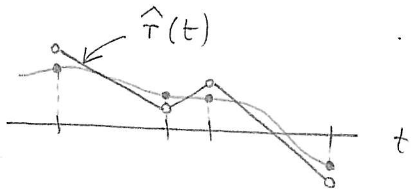
- $t_j = a + \frac{b-a}{k} j$, $j = 0, \dots, k$; $h = \frac{b-a}{k} \Rightarrow \lim_{k \to \infty} h = 0$

( k=8 etc)

- $t_j = a + \frac{b-a}{2^k} j$, $j = 0, \dots, 2^k$; $h = \frac{b-a}{2^k} \Rightarrow \lim_{k \to \infty} h = 0$

( k=1: + ; k=2: + e × ; k=3: +, × e •)

<u>Oss</u>: $t_0 < t_1 < \dots < t_k$; S; c, r come nell' <u>Oss.</u> precedente, $\delta_0, \dots, \delta_k \in \mathbb{R}$; $f \in C^2(t_0, t_k)$



- $\hat{r}(t) = r(c(f) + \delta)(t)$

$$|f - \hat{r}| = |f - r(c(f)) + r(c(f)) - \hat{r}|$$

$$\le |f - r(c(f))| + |\underbrace{r(c(f)) - \hat{r}}| \le e(f) + \|\delta\|_\infty$$

l'elem di S che int i dati $(t_0, \delta_0), \dots, (t_k, \delta_k)$

SE $\|\delta\|_\infty$ indip da k $\boxed{\text{ALLORA}}$ $|f - \hat{r}| \not\xrightarrow[k \to \infty]{} 0$

<u>Oss</u>:

- se ricostr con int pol: $r(c(f))(t)$ dip da <u>tutti</u> i valori $f(t_j)$ (in part dai $t_j > t$ ...)
- se ricostr con f cont lin a tratti: $r(c(f))(t)$ dip <u>solo</u> da $f(t_{j-1})$, $f(t_j)$ con $t_{j-1} < t < t_j$ ...