CN [42] [43] 8 maggio 2008 / C01

def (f di camp; f di ricostr)

$t_0,\dots,t_k \in [a,b]$, distinti ; $c : \mathcal{C}(a,b) \to \mathbb{R}^{k+1}$ t.c. $c(f) = \begin{bmatrix} f(t_0) \\ \vdots \\ f(t_k) \end{bmatrix}$ (f. di CAMPIONAMENTO)

$r : \mathbb{R}^{k+1} \to \mathcal{C}(a,b)$ t.c. lineare ; $\forall y \in \mathbb{R}^{k+1},\ c(r(y)) = y$ (f di RICOSTRUZIONE (rel a c))

Oss: c
- è lin
- NON è inv

Es: $t_0,\dots,t_k \in [a,b]$, distinti ; c f di camp a $t_0,\dots,t_k$

$r : \mathbb{R}^{k+1} \to \mathcal{C}(a,b)$ t.c. $r : \begin{bmatrix} y_0 \\ \vdots \\ y_k \end{bmatrix} \to$ l'elem di $\mathbb{P}_k(\mathbb{R})$ che int i dati (t_0, y_0)...

- r è f di ricostr (rel a c) : dim...

"la ricostr è ottenuta mediante int polinomiale"

---

def (err di ricostr) : $t_0,\dots,t_k$ ist camp ; c f di camp; r f di ricostr rel a c

$e : \mathcal{C}(a,b) \to \mathbb{R}$ t.c.

$$e(f) = \max_{t\in[a,b]} \left| f(t) - r(c(f))(t) \right|$$ ERRORE di RICOSTRUZIONE

Teo (err di ricostr, caso con int polin)

- $t_0,\dots,t_k \in [a,b]$; $f \in \mathcal{C}^{k+1}(a,b)$; p_k l'elem di $\mathbb{P}_k(\mathbb{R})$ che int i dati $(t_0, f(t_0))$, ...

$\forall t \in [a,b]$, $\exists \theta \in [a,b]$ t.c.

$$f(t) - p_k(t) = \frac{f^{(k+1)}(\theta)}{(k+1)!} (t-t_0)\cdots(t-t_k)$$ (dim: no)

Es: $[a,b] = [0, 2\pi]$; $f(t) = \operatorname{sen} t$, $\forall j : |f^{(j)}(t)| \le 1$ (e)

$|t - t_j| \le 2\pi \Rightarrow |f(t) - p_j(t)| \le \frac{(2\pi)^{k+1}}{(k+1)!} \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$

RILETTURA: aumentando (con QUALSIASI CRITERIO) il # di ist di camp, l'errore di ricostr $\to 0$

Es: $[a,b] = [0,1]$, $f(t) = \begin{cases} t \operatorname{sen} \frac{\pi}{t} & t \in (0,1] \\ 0 & t = 0 \end{cases}$

- $t_j = \frac{1}{j+1}$ $j = 0,1,2,\dots$
- $f(t_j) = \frac{1}{j+1} \operatorname{sen}[(j+1)\pi] = 0 \Rightarrow p_k = 0,\ \forall k$ ...

e q.di $f(t) - p_k(t) = f(t) \not\xrightarrow[k\to\infty]{} 0$

- **Oss**: QUALUNQUE f di ricostr fornisce $r(c(f)) = 0$ e q.di $e(f) \not\to 0$!

Oss: $f \in \mathcal{C}^\infty(a,b)$; $M_j = \max_{t\in[a,b]} |f^{(j)}(t)|$;

$$e(f) = \max_{t\in[a,b]} |f(t) - p_k(t)| \le \frac{M_{k+1}}{(k+1)!}(b-a)^{k+1}$$

(SE) M_j "non cresce troppo rapidam con j" ALLORA $e(f) \to 0$ con QUALSIASI CRITERIO

- **Es**: $f(t) = \operatorname{sen} \omega t$, $M_j = \omega^j$ e...
  $f(t) = e^{\alpha t}$, $M_j = e^{\alpha b} \alpha^j$ e...

ALTRIMENTI: (I) $\forall f \in \mathcal{C}$, $\exists$ criterio t.c. $e(f) \to 0$ (ma... QUALE?)
(II) $\forall$ criterio, $\exists f \in \mathcal{C}$ t.c. $e(f) \not\to 0$

CONCLUSIONE ricostr otten mediante int polin NON SODDISFACENTE.

---

def (f lin a tratti): $a < b \in \mathbb{R}$; $a = t_0 < t_1 < \dots < t_k = b$, $I_j = [t_{j-1}, t_j]$ $j = 1,\dots,k$

$f \in S$ (se) f continua su $[a,b]$; $\forall j\ \exists p_j \in \mathbb{P}_1(\mathbb{R})$ t.c. $f = p_j$ su I_j

ins delle f CONTINUE LINEARI A TRATTI (su $I_1,\dots,I_k$)

Oss: (I) dati $I_1,\dots,I_k$; S è ssv di $\mathcal{C}(a,b)$ [Es: dimostrare!]