Oss: basi diverse di $\mathbb{P}_k(\mathbb{R}) \Rightarrow$ forme diverse del p. che interpola.

Es:
- $\langle \ell_0, \dots, \ell_k \rangle$ base & forma di LAGRANGE (matr identica)
- $\langle 1, x, \dots, x^k \rangle$ base & forma di VANDERMONDE (matr di V.)
- $\langle 1, x-x_0, (x-x_0)(x-x_1), \dots, (x-x_0)\cdots(x-x_{k-1}) \rangle$ base & forma di NEWTON (matr tr inf)

Es: dati $(0,1)$, $(-1,2)$, $(3,10)$, $(1,10)$
- determ f di Newt del p che int ("interpolante")
- (per casa) stessa domanda per dati permutati: $(-1,2), (0,1), (1,10), (3,10)$

Oss (condizionam)

Moto verticale di un punto pesante di massa m:

$$z(t) = -\frac{1}{2} g t^2 + v_0 t + z_0 \in \langle 1, t, t^2 \rangle = \mathbb{P}_2(\mathbb{R})$$

1) ESPERIMENTO: misure $(t_0, \hat{z}_0), (t_1, \hat{z}_1), (t_2, \hat{z}_2)$
- polin int f. di Vand: $p(t) = \alpha_0 + \alpha_1 t + \alpha_2 t^2$
- valori stimati: $\alpha_0 \approx z_0$, $\alpha_1 \approx v_0$, $\alpha_2 \approx -\frac{1}{2} g$

errore commesso?

A) $z(t)$ è il p int nei ai dati $(t_0, z(t_0)), (t_1, z(t_1)), (t_2, z(t_2))$
$p(t)$ è " " " perturbati ...

B) $\begin{bmatrix} z_0 \\ v_0 \\ -\frac{1}{2}g \end{bmatrix}$ è la sol del sist $Vx = \begin{bmatrix} z(t_0) \\ z(t_1) \\ z(t_2) \end{bmatrix}$; $\begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix}$ di $Vx = \begin{bmatrix} \hat{z}_0 \\ \hat{z}_1 \\ \hat{z}_2 \end{bmatrix}$

C) come dipende l'err nella stima dall' err di misura?
Risposta: $\boxed{\text{CONDIZIONAM del sistema } Vx = b}$

2) stesso esperimento; $t \neq t_j$, val stimato: $p(t)$ v. esatto $z(t)$
errore?

A) $\delta_d = |p(t) - z(t)|$; $\hat{z}_j - z(t_j) = \delta_j$

B) $\boxed{\text{f di condiz: } \delta_d = |\delta_0 \ell_0(t) + \delta_1 \ell_1(t) + \delta_2 \ell_2(t)|}$

def (Pb. lineare di interpolaz)

dati
- $[a,b] \subset \mathbb{R}$ int non degen; k intero ≥ 0
- $\mathcal{G}$ ssv di $\mathcal{C}([a,b])$; $\dim \mathcal{G} = j$, $0 < j < +\infty$
- $L_0, \dots, L_k : \mathcal{G} \to \mathbb{R}$ lineari; $y_0, \dots, y_k \in \mathbb{R}$

determ $g \in \mathcal{G}$ t.c. $L_0(g) = y_0, \dots, L_k(g) = y_k$

Es: 1) determ $x(t) \in \mathcal{C}^2$ t.c. $\begin{cases} x'' - x' = 0 \\ x(0) = x_0, \; x'(0) = x_0' \end{cases}$ $(x_0, x_0' \in \mathbb{R})$
- $[a,b] = \mathbb{R}$, $k = 1$
- $\mathcal{G} = \{ v \in \mathcal{C}^2 \text{ t.c. } v'' - v' = 0 \}$ $(j = 2)$
- $L_0(w) = w(0)$, $L_1(w) = w'(0)$; $y_0 = x_0$, $y_1 = x_0'$

2) determ $x(t) \in \mathcal{C}^2$ t.c. $\begin{cases} x'' - x = 0 \\ x(0) = 0, \; x(2\pi) = 0 \end{cases}$
- $[a,b] = \mathbb{R}$, $k = 1$
- $\mathcal{G} = \{ v \in \mathcal{C}^2 \text{ t.c. } v'' - v = 0 \}$ $(j = 2)$
- $L_0(w) = w(0)$, $L_1(w) = w(2\pi)$; $y_0 = 0$, $y_1 = 0$

SOL: posto $\mathcal{G} = \langle \gamma_0, \dots, \gamma_j \rangle$
cerco $\alpha_0, \dots, \alpha_j \in \mathbb{R}$ t.c. $g = \alpha_0 \gamma_0 + \dots + \alpha_j \gamma_j$
verifica $L_0(g) = y_0, \dots, L_k(g) = y_k$
ovvero t.c.

$$\begin{bmatrix} L_0(\gamma_0) & \cdots & L_0(\gamma_j) \\ \vdots & & \\ L_k(\gamma_0) & \cdots & L_k(\gamma_j) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \vdots \\ \alpha_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_0 \\ \vdots \\ y_k \end{bmatrix}$$

ATTENZIONE: $(k+1)$ eq in $(j+1)$ incognite ... !!