- NORMA di MATRICE

def : $(\mathbb{R}^n, N)$, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$; $\|A\|_N = \sup\left\{ \frac{N(Av)}{N(v)}, v \neq 0 \right\}$

Proprietà :
- $N(Av) \leq \|A\|_N \, N(v)$ (Es: dimostrare !)
- $\|AB\|_N \leq \|A\|_N \|B\|_N$

- (interpretazione geom)

$$\|A\|_N = \max\{ N(Av), N(v) = 1 \}$$

se A invert : $\|A^{-1}\|_N = \left(\min\{ N(Av), N(v) = 1 \} \right)^{-1}$

Es :
- $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$; dim che $\|A\|_1 \geq \max |a_{ij}|$
- $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ invertibile ; dim che $\|A^{-1}\|_N \leq \frac{1}{\|A\|_N}$
- $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ invertibile ; $b \in \mathbb{R}^n$, x^* la soluz di $Ax = b$; dim che

$$N(x^*) \geq \frac{N(b)}{\|A\|_N}$$

CONDIZIONAMENTO

dati del Pb : $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, invert ; $b \in \mathbb{R}^n$

soluz del Pb : $x^* = A^{-1} b$

perturbaz sui dati

dati perturbati : $A + \delta A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, invert ; $b + \delta b \in \mathbb{R}^n$

soluz del Pb perturbato : $\hat{x}$

def : $(\mathbb{R}^n, N)$; errore relativo sui dati : $\underbrace{\frac{\|\delta A\|_N}{\|A\|_N}}_{\epsilon_A}$, $\underbrace{\frac{\|\delta b\|_N}{\|b\|_N}}_{\epsilon_b}$

$$\epsilon_d = \frac{\|\hat{x} - x^*\|_N}{\|x^*\|_N}, \quad \hat{\epsilon}_d = \frac{\|\hat{x} - x^*\|_N}{\|\hat{x}\|_N}$$

errore nel trasm dai dati

FUNZIONE di CONDIZIONAM :

$$\epsilon_d = F(A, b; \epsilon_A, \epsilon_b)$$