CN 27 28 10 aprile 2008 / C01

Classi di mat per cui EG t certamente:

- PDF (predom diag forti)
- SDP (simm def positive)

① PDF def: ... < per righe / per colonne

PROPRIETÀ: (I) A è PDF ⇒ A[k] è PDF per $k=1,\dots,n$
(II) A è PDF ⇒ $\det A \neq 0$

dim: (I) ovvio da def; (II) si dim che PDF ⇒ ($Ax=0 \Rightarrow x=0$)
(per righe; per colonne dim simile)

ALLORA

$$\boxed{\begin{array}{l}(I)+(II):\ A \text{ è PDF} \Rightarrow \det A[k]\neq 0 \text{ per } k=1,\dots,n-1\\ \text{q. di (teo term): EG } t \text{ su } A\end{array}}$$

---

② SDP def: $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$ è SDP se < simm ($A^T=A$) / $\forall v\neq 0,\ Av\cdot v>0$ (ps canonico)

Es • $\alpha I\in\mathbb{R}^{n\times n}$, $\alpha\in\mathbb{R}$; è simm $\forall\alpha\in\mathbb{R}$, $v^T\alpha I v=\alpha v^Tv=\alpha\|v\|^2$
è SDP ⇔ $\alpha>0$ (in gen: $\operatorname{diag}(\lambda_1,\dots,\lambda_n)$ è SDP ⇔ $\lambda_k>0$ ...).

• $\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}=J\in\mathbb{R}^{2\times 2}$ è simm; $v^TJv=(v_1,v_2)\begin{pmatrix}v_2\\v_1\end{pmatrix}=2v_1v_2$
e $v^TJv=0$ per (ad es.) $v=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$: J non SDP.

PROPRIETÀ: (I) A è SDP ⇒ A[k] è SDP per $k=1,\dots,n$
(II) A è SDP ⇒ $\det A\neq 0$

dim: (I) no; (II) si dim che SDP ⇒ ($Ax=0 \Rightarrow x=0$)

ALLORA

$$\boxed{\begin{array}{l}(I)+(II):\ A \text{ è SDP} \Rightarrow \det A[k]\neq 0 \text{ per } k=1,\dots,n-1\\ \text{q. di (teo term): EG } t \text{ su } A\end{array}}$$

Oss: $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$, SDP. Allora: ∃ fatt LR di A (S, D) tc
(I) $D=\operatorname{diag}(d_{11},\dots,d_{nn})\,S^T$; (II) $d_{11}>0,\dots,d_{nn}>0$ (dim: ...)

Oss: Sia A simm; se EG t su A e produce S, D con $d_{11}>0,\dots,d_{nn}>0$ allora A è SDP.
(dim: ...)

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{Teo: A simm. SDP} \Leftrightarrow \text{EG } t \text{ su A e produce S, D con } d_{11}>0,\dots,d_{nn}>0\\ \Leftrightarrow \det A[k]>0 \text{ per } k=1,\dots,n\end{array}}$$

Es: $A:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^{3\times 3}$ t.c. $A(x)=\begin{bmatrix}3&1&0\\1&x&x\\0&x&2\end{bmatrix}$.

Determ per quali $x\in\mathbb{R}$ la matrice $A(x)$ risulta SDP.