Oss: $k \in \{1, \dots, n-1\}$, $v \in \mathbb{R}^n$ t.c. $v_k \neq 0$; posto

$$l = (\underbrace{0, \dots, 0}_{k}, \frac{v_{k+1}}{v_k}, \dots, \frac{v_n}{v_k})^T \in \mathbb{R}^n$$

e $\boxed{H = I - l e_k^T} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ si ha:

- H è triangolare inferiore con $h_{jj} = 1$, $j = 1, \dots, n$
- $Hv = (v_1, \dots, v_k, 0, \dots, 0)^T$
- $\forall w \in \mathbb{R}^n$ con $w_k = 0$, $Hw = w$

$\boxed{\text{Notazione: } H = \lambda(v, k)}$

$(S, D) = EG(A)$

dati: $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$;

$A^{(1)} = A$;

per $k = 1, \dots, n-1$ ripeti

se $a_{kk}^{(k)} \neq 0$ allora

- $H_k = \lambda(a_k^{(k)}, k)$;
- $A^{(k+1)} = H_k A^{(k)}$

altrimenti STOP

uscita: $S = H_1^{-1} \cdots H_{n-1}^{-1}$; $D = A^{(n)}$

($a_{kk}^{(k)}$: PIVOT)

Es: $k = 2$, $v = (1, 2, 4, 6)^T$

- $v_2 = 2 \neq 0$
- $l = (0, 0, 2, 3)^T$
- $l e_2^T = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} (0, 1, 0, 0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \end{bmatrix} = (0, l, 0, 0)$
- $H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

e $Hv = \dots$

Es: $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \\ 6 & 1 & -1 \end{bmatrix}$. $A^{(1)} = A$;

- $k = 1$; $a_{11}^{(1)} = 2 \neq 0$: $H_1 = \lambda(a_1^{(1)}, 1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $A^{(2)} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \end{bmatrix}$
- $k = 2$; $a_{22}^{(2)} = -2 \neq 0$: $H_2 = \lambda(a_2^{(2)}, 2) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$, $A^{(3)} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$

$$EG(A) = \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \right)$$

Oss:

- $A^{(n)}$ è triangolare superiore
- H_k^{-1} è tr inf con 1 sulla diagonale, $k = 1, \dots, n-1$

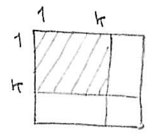
$\Rightarrow S = H_1^{-1} \cdots H_{n-1}^{-1}$ è tr inf con 1 sulla diagonale

- $A^{(n)} = H_{n-1} \cdots H_1 A \Rightarrow A = (H_1^{-1} \cdots H_{n-1}^{-1}) A^{(n)} = SD$.

Pb: non sempre EG termina (Es: $A = J_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$)

def (minori principali di testa)

$A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $k \in \{1, \dots, n\}$; $A[k]$ minore di A:



"minore principale di testa (di ord k)"

TEO (di terminazione, EG) (dim: no)

$A \in \mathbb{R}^{n \times n}$; EG termina su A ($\sim a_{kk}^{(k)} \neq 0$ per $k = 1, \dots, n-1$) $\Longleftrightarrow$ $\det A[k] \neq 0$, $k = 1, \dots, n-1$

Es: $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

nt, ns — t, s — nt, ?

Oss (1) se S, D fatt LR di A con $d_{kk} \neq 0$, allora $\exists!$ fatt LR di A (dim: ...; vero anche se $d_{nn} = 0$)

Q. di: $\boxed{\text{SE EG t su A ALLORA EG trova l'UNICA fatt}}$

(2) $\boxed{A \text{ invert. EG nt su } A \Rightarrow \nexists \text{ fatt LR}}$

dim ($\exists$ fatt LR $\Rightarrow$ EG t su A):

- S, D fatt LR;
- A invert $\Rightarrow$ D invert $\Rightarrow$ $d_{kk} \neq 0$ $\forall k$;
- $A = SD \Rightarrow A[k] = S[k] D[k]$ (disegnino...)

$\Rightarrow \det A[k] = \det D[k] = d_{11} \cdots d_{kk} \neq 0$

$\Rightarrow$ EG t (da teo terminazione)

	EG t	EG nt
i	$\exists!$	$\nexists$
ni	$\exists!$	?

RELAZIONE EG - fatt LR