CN 22 23 3 aprile 2008 / C01

Casi semplici

(D) A diagonale

(T) A triangolare

(O) A ortogonale

(P) A matrice di permutazione (le col di A sono una permutaz delle col di I ; le righe ... ; Es: I, J)

> Oss: A di perm: • ⇒ A ortogonale
> • $v \in \mathbb{R}^n$, le comp di Av si ott...

• invertibile certamente

• soluzione: $x^* = A^T b$ (permutazione ...)

Es: $v = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}$; det P di perm t.c. $Pv = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$

Caso generale

idea: fattorizzare A con fattori "semplici" ...

Es: (1) fattorizz LR $S, D \in \mathbb{R}^{n \times n}$ t.c.
- S tr inf con $s_{kk} = 1$ (invert!)
- D tr sup
- A = SD

> Oss: A invert ⇔ D invert

(2) fattorizz QR

$U, T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ t.c.
- U ortogonale (invertibile!)
- T tr sup
- A = UT

> Oss: A invert ⇔ T invert

... poi (uso della fatt $A = MN$):

$Ax = b \sim MNx = b$ • cambio variabile: $Nx = c$ ← invertibile!
- $Mc = b$ (caso semplice) ⟶ ricavo c
- $Nx = c$ (caso semplice) ⟶ ricavo x

Es: $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 0 \\ 1 & 6 & 0 \end{bmatrix}$, $b = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 7 \end{bmatrix}$;
- calc fatt LR di A
- usarla per risolvere sist

(Oss: metodo di DOOLITTLE, in questo caso tutto ok...)

Es: $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 0 \\ 1 & 6 & 0 \end{bmatrix}$, determ fatt LR usando proc di ELIMINAZ di GAUSS (EG).

0) $A^{(0)} = A$

1) $r'_1 = r_1$

$r'_2 = r_2 + \lambda_{21} r_1$ (λ_{21} t.c. $r'_{21} = 0$)

$r'_3 = r_3 + \lambda_{31} r_1$ (λ_{31} t.c. $r'_{31} = 0$)

$$\sim A^{(1)} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \lambda_{21} & 1 & 0 \\ \lambda_{31} & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{H_1} A^{(0)}$$

2) $r'_1 = r_1$, $r'_2 = r_2$

$r'_3 = r_3 + \lambda_{32} r_2$ (λ_{32} t.c. $r'_{32} = 0$)

$$\sim A^{(2)} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_{32} & 1 \end{bmatrix}}_{H_2} A^{(1)}$$

Oss: • $A^{(2)}$ è tr sup
- H_1, H_2 tr inf con 1 sulle diag (⇒ invertibili)
- $A^{(2)} = H_2 H_1 A$ ovvero $A = H_1^{-1} H_2^{-1} A^{(2)}$

e $H_1^{-1} H_2^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\lambda_{21} & 1 & 0 \\ -\lambda_{31} & -\lambda_{32} & 1 \end{bmatrix}$ è tr inf con 1 sulla diag

q.di: $H_1^{-1} H_2^{-1}$, $A^{(2)}$ è fatt LR di A