CN $\boxed{7}$, $\boxed{8}$ 6 marzo 2008 / C01

def: $\varepsilon_t = \dfrac{\varphi(\xi) - f(x)}{f(x)}$; $\varepsilon_d = \dfrac{f(\xi) - f(x)}{f(x)}$; $\varepsilon_a = \dfrac{\varphi(\xi) - f(\xi)}{f(\xi)}$

Oss: $\varepsilon_t = \varepsilon_a + \varepsilon_d + \varepsilon_a \varepsilon_d$ (dim: ...)

(I) studio dell'errore trasmesso dai dati (CONDIZIONAMENTO)

def: $x, \tilde{x} \in \mathbb{R}^n$; $\delta_k = \tilde{x}_k - x_k$ err. assol. sul dato k-esimo

se $x_k \neq 0$: $\varepsilon_k = \dfrac{\tilde{x}_k - x_k}{x_k}$ " rel. " " "

Oss:
$$\begin{aligned}\delta_d &= f(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_n) - f(x_1, \dots, x_n) \\ &= f(x_1+\delta_1, \dots, x_n+\delta_n) - f(x_1, \dots, x_n) = F(x_1, \dots, x_n; \delta_1, \dots, \delta_n) \\ &= f(x_1(1+\varepsilon_1), \dots, x_n(1+\varepsilon_n)) - f(x_1, \dots, x_n) = G(x_1, \dots, x_n; \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)\end{aligned}$$

$\varepsilon_d = \dots$ FUNZIONE di CONDIZIONAMENTO (che esprime l'errore trasm dai dati in termini di dati e di errore sui dati)

Es (f. di condiz per le op aritmetiche)

1) $f(x_1, x_2) = x_1 + x_2$

$$\delta_d = (x_1 + \delta_1 + x_2 + \delta_2) - (x_1 + x_2) = \delta_1 + \delta_2$$

$$\varepsilon_d = \dots = \frac{x_1}{x_1+x_2}\varepsilon_1 + \frac{x_2}{x_1+x_2}\varepsilon_2$$

2) $f(x_1, x_2) = x_1 x_2$

$$\delta_d = (x_1+\delta_1)(x_2+\delta_2) - x_1 x_2 = x_1\delta_2 + x_2\delta_1 + \delta_1\delta_2$$

$$\varepsilon_d = \dots = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_1\varepsilon_2$$

3) $f(x_1, x_2) = \dfrac{x_1}{x_2}$; $\delta_d = \dfrac{x_2\delta_1 - x_1\delta_2}{x_2(x_2+\delta_2)}$, $\varepsilon_d = \dfrac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{1+\varepsilon_2}$

Es:
- $x_1 = 0{,}7567$, $\tilde{x}_1$ t.c. $\tilde{x}_1 = x_1(1+\varepsilon_1)$ e $|\varepsilon_1| \le 10^{-2}$
  $x_2 = -0{,}7566$, $\tilde{x}_2$ t.c. $\tilde{x}_2 = x_2(1+\varepsilon_2)$ e $|\varepsilon_2| \le 10^{-2}$
  ... $\varepsilon_d = 7567\,\varepsilon_1 - 7566\,\varepsilon_2 \Rightarrow \boxed{|\varepsilon_d| \le 151{,}33}$
- $x_1 \in [0{,}99 ; 1{,}01]$; determ x_1° e E_1 tali che $x_1 = x_1^\circ(1+\varepsilon_1)$ con $|\varepsilon_1| \le E_1$
  (ovvero t.c. $\forall x_1, \exists \varepsilon_1 \in [-E_1, E_1]$ e $x_1 = x_1^\circ(1+\varepsilon_1)$)
  $x_2 \in [99, 101]$ (cento volte l'int precedente); ripeter l'es precedente

---

(II) Studio dell'errore algoritmico (STABILITA')

Oss (caso elementare): $f: A \to \mathbb{R}$, $\varphi: A \cap M^n \to M$ t.c. $\varphi(\xi) = rd(f(\xi))$

allora: $|\delta_a| = |\varphi(\xi) - f(\xi)| = |rd(f(\xi)) - f(\xi)| \le \frac{1}{2}\beta^{b-m}$, b...

$|\varepsilon_a| = \dots \le u$

Es (pseudo-op aritmetiche): per $* \in \{+, -, \times, /\}$ si ha

$f(x_1, x_2) = x_1 * x_2$, $\varphi(\xi_1, \xi_2) = \xi_1 \circledast \xi_2$ ecc.

Es (caso non elem): $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2)\,x_3$; $\varphi(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = (\xi_1 \overset{1}{\oplus} \xi_2) \overset{2}{\otimes} \xi_3$

Siccome
- $\xi_1 \oplus \xi_2 = rd(\xi_1 + \xi_2) = (\xi_1 + \xi_2)(1+\varepsilon_a)$, $|\varepsilon_a| \le u$
- $\xi_1 \otimes \xi_2 = \dots$

allora: $\varphi(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = (\xi_1 + \xi_2)(1+\varepsilon_{a1})\,\xi_3\,(1+\varepsilon_{a2}) = F(\xi_1, \xi_2, \xi_3; \varepsilon_{a1}, \varepsilon_{a2})$

dunque posso scrivere

$$\left.\begin{aligned}\delta_a &= \Delta(\xi_1, \xi_2, \xi_3; \varepsilon_{a1}, \varepsilon_{a2}) \\ \varepsilon_a &= E(\xi_1, \xi_2, \xi_3; \varepsilon_{a1}, \varepsilon_{a2})\end{aligned}\right\}$$ FUNZIONE di STABILITA' di φ (quando utilizz per appross f)