Dipartimento di Matematica Applicata
« Ulisse Dini »

Problemi di Calcolo Numerico

Corso di Laurea in Ingegneria Elettronica
Corso di Laurea in Ingegneria delle Telecomunicazioni

a.a. 2007/2008

2 Zeri di funzioni reali

`Problema 1`
Sia f la funzione definita, per $x > 0$, da $f(x) = \ln x - \frac{1}{x}$.

(1) Determinare il numero di zeri di f e separarli.

(2) Per ciascuno zero indicare un $x_0 \in \mathbf{R}$ a partire dal quale la successione generata dal metodo di Newton (operando in $\mathbf{R}$) risulta convergente e specificare l'andamento qualitativo della successione.

`Problema 2`
Sia h la funzione definita, per $x \in \mathbf{R}$, da $h(x) = 2 - \operatorname{arctg}(x)$.

(1) Dimostrare che h ha un solo punto unito;

(2) decidere se il metodo ad un punto definito da h sia utilizzabile per approssimare il punto unito e, in tal caso, indicare x_0 a partire dal quale la successione generata dal metodo (operando in $\mathbf{R}$) risulta convergente e specificare l'andamento qualitativo della successione.

`Problema 3`
Sia h la funzione definita, per $x \in \mathbf{R}$, da

$$h(x) = \begin{cases} 1 - x^2 & \text{per } x \le 0 \\ 1 & \text{per } x > 0 \end{cases}$$

(1) Determinare i punti uniti di h e separarli;

(2) per ciascun punto unito decidere se il metodo ad un punto definito da h sia utilizzabile per approssimarlo e, in caso affermativo, indicare x_0 a partire dal quale la successione generata dal metodo (operando in $\mathbf{R}$) risulta convergente e specificare l'andamento qualitativo della successione;

(3) determinare la successione definita dal metodo a partire da $x_0 = -\frac{1}{2}$.

Problema 4

Si consideri il metodo iterativo ad un punto definito da

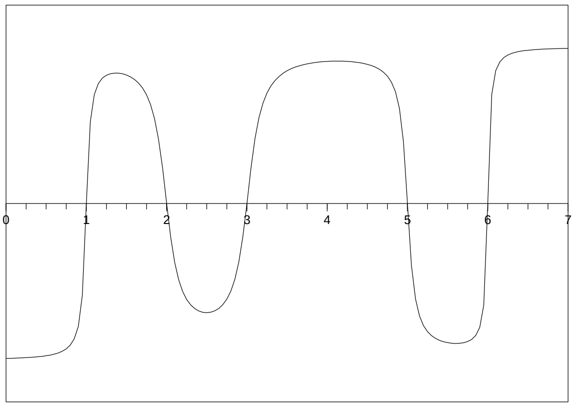
$$x_{k+1} = \frac{x_k^2 + 2}{3}$$

e sia x_n una successione convergente generata dal metodo.

Indicare i possibili valori di $\lim_{n\to\infty} x_n$.

Problema 5

Il grafico della funzione $f : [0, 7] \to \mathbf{R}$ è rappresentato nella figura seguente.



Sia I_k la successione degli intervalli ottenuti applicando ad f la procedura di bisezione a partire dall'intervallo $I_0 = [0, 7]$, operando in $\mathbf{R}$.

Indicando con x_k il punto centrale dell'intervallo I_k, determinare $\lim_{k\to\infty} x_k$.

Problema 6

Sia f la funzione definita per $x \in \mathbf{R}$ da $f(x) = \mathrm{arctg}(x)$.

Indicare $x_0 \in \mathbf{R}$ a partire dal quale la successione generata dal metodo di Newton applicato ad f (ed operando in $\mathbf{R}$) risulta convergente.
(Suggerimento: utilizzare il Teorema di convergenza locale per metodi ad un punto.)

Problema 7

Siano $a > 0$ e f la funzione definita per $x > 0$ da $f(x) = \frac{1}{x} - a$.

(a) Indicare $x_0 \in \mathbf{R}$ a partire dal quale la successione generata dal metodo di Newton applicato ad f (ed operando in $\mathbf{R}$) risulta convergente. Per tale successione, indicare inoltre il limite e l'andamento qualitativo.

(b) Determinare la funzione h che genera il metodo di Newton applicato ad f.

`Problema 8`

Sia f la funzione definita per $x \in \mathbf{R}$ da $f(x) = e^x + 6x - 5$, e si consideri il metodo iterativo definito dalla funzione h definita per $x \in \mathbf{R}$ da

$$h(x) = \frac{5 - e^x}{6}$$

(1) Verificare che i punti fissi di h coincidono con gli zeri di f.

(2) Dimostrare che f ha un solo zero nell'intervallo $[0, 1]$.

(3) Utilizzare il Teorema di convergenza locale per dimostrare che per ogni $x_0 \in [0, 1]$ la successione generata dal metodo definito da h risulta convergente.

`Problema 9`

Siano $f \in \mathcal{C}^2(\mathbf{R})$ ed $[a, b]$ tali che

(a) esiste α zero di f in $[a, b]$;

(b) $f' > 0$, $f'' > 0$ in $[a, b]$.

Si consideri il metodo iterativo ad un punto definito dalla funzione

$$h(x) = x - \frac{f(x)}{f'(b)}$$

(1) Dimostrare che

$$\text{per ogni } x \in [a, b[\text{ si ha } 0 < h'(x) \leq 1 - \frac{f'(a)}{f'(b)} < 1$$

e dedurne che per ogni $x_0 \in [a, b]$ la successione definita dal metodo iterativo a partire da x_0 – operando in $\mathbf{R}$ – è convergente ad α, monotona ed ha ordine di convergenza ad α pari a 1.

(2) Interpretazione geometrica del metodo: mostrare che $h(x)$ è lo zero della funzione che ha per grafico la retta per $(x, f(x))$ e coefficiente angolare $f'(b)$.

`Problema 10`

Sia h la funzione definita, per $x \in \mathbf{R}$, da $h(x) = 1 - x^2$.

(1) Determinare il numero di punti uniti di h e separarli.

(2) Per ciascun punto unito, decidere se il metodo ad un punto definito da h sia utilizzabile per l'approssimazione e, in caso affermativo, indicare x_0 a partire dal quale la successione generata dal metodo (operando in $\mathbf{R}$) risulta convergente.

(3) Determinare la successione generata dal metodo a partire da $x_0 = 0$.

`Problema 11`

Siano $f \in \mathcal{C}^1(\mathbf{R})$ e $[a, b] \subset \mathbf{R}$ tali che:

(a) $f(a)f(b) < 0$ – e quindi esiste uno zero di f in $[a, b]$;

(b) $f' > 0$ in $[a, b]$ – e quindi esiste un solo zero di f in $[a, b]$.

Determinare $\lambda \in \mathbf{R}$ tale che, posto $h(x) = x + \lambda f(x)$ si abbia

$$0 < h'(x) < 1 \text{ per } x \in [a, b]$$

e quindi che per ogni $x_0 \in [a, b]$ la successione generata dal metodo definito da h a partire da x_0 risulta convergente allo zero in $[a, b]$, monotona con ordine di convergenza pari a 1.

(Risposta: posto $m = \min |f'|$ su $[a, b]$, si ha $-\frac{1}{m} < \lambda < 0$).

`Problema 12`

Siano h la funzione definita, per $x \in \mathbf{R}$, da $h(x) = \frac{1}{1+x^2}$ e $I = [1, 2]$.

(a) dimostrare che h ed I verificano l'ipotesi (2) del Teorema di convergenza locale;

(b) verificare che h non ha punti uniti in I.

`Problema 13`

Sia $f \in \mathcal{C}(\mathbf{R})$ tale che $f(\frac{1}{2})\, f(1) < 0$. Per approssimare uno zero di f si utilizza il metodo di bisezione con intervallo iniziale $I_0 = [\frac{1}{2}, 1]$ e criterio di arresto

$$\operatorname{mis} I_k \leq E$$

Indicare il più piccolo valore di E che ha senso considerare supponendo di operare in $F(2, 10)$.

`Problema 14`

Sia h la funzione definita, per $x \in \mathbf{R}$, da $h(x) = \operatorname{arctg} x$ e si consideri il metodo iterativo definito da h.

(a) Dimostrare che h ha un solo punto unito e, in esso, calcolare h'.

(b) Dimostrare che per ogni $x_0 \in \mathbf{R}$ la successione generata dal metodo iterativo a partire da x_0 converge al punto unito di h.

`Problema 15`

Sia f la funzione definita, per $x \in \mathbf{R}$, da $f(x) = e^{-2x} + x - 1$.

(a) Determinare il numero di zeri di f e separarli.

(b) Discutere l'uso (operando in $\mathbf{R}$) del metodo iterativo definito dalla funzione

$$h(x) = 1 - e^{-2x}$$

per approssimare gli zeri di f.

`Problema 16`

Sia f la funzione definita, per $x \in \mathbf{R}$, da $f(x) = e^{-2x} + x - 1$. Detto α lo zero positivo di f, indicare un valore x_0 a partire dal quale la successione generata dal metodo di Newton applicato ad f (ed operando in $\mathbf{R}$) risulta convergente ad α.

Discutere l'andamento della successione individuata.

`Problema 17`

Sia f la funzione definita, per $x \in \mathbf{R}$, da $f(x) = e^{-x} - 2x$.

(a) Determinare il numero di zeri di f e separarli.

(b) Per ciascun $x_0 \in \mathbf{R}$, determinare il limite e l'andamento qualitativo della successione generata, a partire da x_0 ed operando in $\mathbf{R}$, dal metodo di Newton applicato ad f.

`Problema 18`

Sia $g(x) = x - 1$ e siano $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ e $\epsilon > 0$ tali che

$$|f(x) - g(x)| \leq \epsilon \text{ per ogni } x \in \mathbf{R}$$

(1) Dimostrare che f ha almeno uno zero;

(2) indicare il più piccolo intervallo di $\mathbf{R}$ che certamente contiene tutti gli zeri di f.