Dipartimento di Matematica Applicata
« Ulisse Dini »

Problemi di Calcolo Numerico

Corso di Laurea in Ingegneria Elettronica
Corso di Laurea in Ingegneria delle Telecomunicazioni

a.a. 2007/2008

3 Sistemi di equazioni lineari

`Problema 1`

Dimostrare che se $A \in \mathbf{R}^{n\times n}$ è una matrice simmetrica definita positiva e $P \in \mathbf{R}^{n\times n}$ è una matrice di permutazione, allora $B = P^{\mathsf{T}}AP$ è simmetrica definita positiva.

(Suggerimento: utilizzare la definizione di matrice simmetrica definita positiva.)

`Problema 2`

Utilizzando la definizione, dimostrare che se $A \in \mathbf{R}^{n\times n}$ è una matrice simmetrica definita positiva allora per $k = 1, \ldots, n$ si ha $a_{kk} > 0$.

`Problema 3`

Siano $A \in \mathbf{R}^{n\times n}$ e $x_1, \ldots, x_4 \in \mathbf{R}^n$ tali che

i	$\|\|x_i\|\|$	$\|\|Ax_i\|\|$
1	1	10
2	10	10
3	25	6
4	10^{-3}	100

Indicare un limite inferiore per $||A||$.

`Problema 4`

Sia $A \in \mathbf{R}^{4\times 4}$, e siano $r_1, \ldots, r_4$ le sue righe. Posto

$$B = \begin{bmatrix} r_1 \\ 2r_1 + r_2 \\ -r_1 + r_3 \\ -r_4 \end{bmatrix}$$

(1) determinare una matrice $H \in \mathbf{R}^{4\times 4}$ tale che

$$HA = B$$

(2) decidere se la matrice trovata è l'unica che soddisfa la proprietà richiesta.

(3) dopo aver verificato che H risulta invertibile, determinare H^{-1}.

(Suggerimento: non calcolare l'inversa direttamente ma ragionando sulle righe di A e B e sul fatto che $H^{-1}B = A$.)

`Problema 5`

Sia $A \in \mathbf{R}^{n\times n}$ una matrice triangolare superiore invertibile.

(1) Verificare che se $Ax = e_j$ allora $x_k = 0$ per $k > j$.

(2) Verificare che A^{-1} è triangolare superiore.

`Problema 6`

Sia $A \in \mathbf{R}^{n\times n}$ una matrice triangolare superiore con $a_{kk} = 1$ per $k = 1, \ldots, n$.

(1) Verificare che se $Ax = e_j$ allora $x_j = 1$ e $x_k = 0$ per $k > j$.

(2) Verificare che $B = A^{-1}$ è triangolare superiore con $b_{kk} = 1$ per $k = 1, \ldots, n$.

`Problema 7`

Per ogni $a \in \mathbf{R}$, si consideri la matrice

$$A(a) = \begin{bmatrix} 1 & a & 0 \\ a & 1 & a \\ 0 & a & 1 \end{bmatrix}$$

(1) Determinare l'insieme $T = \{\, a \in \mathbf{R} \text{ tali che } \texttt{EG} \text{ termina su } A(a) \,\}$, e per ciascun $a \in T$ indicare la fattorizzazione LR individuata da `EG`.

(2) Descrivere come si possano utilizzare i risultati otenuti in (1) per determinare l'insieme $P = \{\, a \in \mathbf{R} \text{ tali che } A(a) \text{ è definita positiva} \,\}$.

`Problema 8`

Si consideri la matrice simmetrica

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 14 \end{bmatrix} \in \mathbf{R}^{3\times 3}$$

(1) indicare la fattorizzazione LR individuata da `EG` ed utilizzarla per decidere se A sia definita positiva;

(2) detta S, D la fattorizzazione LR determinata in (1), indicare Δ diagonale ad elementi non negativi tale che $A = S\Delta S^{\mathsf{T}}$;

(3) utilizzare i risultati ottenuti in (2) per determinare L triangolare inferiore tale che $A = LL^{\mathsf{T}}$ (suggerimento: determinare M diagonale tale che $\Delta = MM^{\mathsf{T}}$);

(4) mostrare che per ogni $x \in \mathbf{R}^3$ si ha $x^\mathsf{T} A x = ||L^\mathsf{T} x||_2^2$.

`Problema 9`

Determinare l'insieme

$$\mathcal{D} = \{\, a, b, c \in \mathbf{R} \text{ tali che } \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \text{ è definita positiva.} \}$$

`Problema 10`

Siano

$$M = \begin{bmatrix} 1 & & & 2 & & \\ & 1 & & -1 & & \\ & & 1 & 6 & & \\ & & & 1 & & \\ & & & 2 & 1 & \\ & & & 3 & & 1 \end{bmatrix} \quad , \quad A = \begin{bmatrix} \hat{a}_1 \\ \vdots \\ \hat{a}_6 \end{bmatrix} \in \mathbf{R}^{6\times 6}$$

(1) Determinare MA;

(2) Determinare M^{-1}.

`Problema 11`

La procedura `EGP` (eliminazione di Gauss con pivoting) applicata ad una matrice $A \in \mathbf{R}^{4\times 4}$ produce le matrici seguenti:

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \quad , \quad N = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad , \quad V = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Determinare A.

`Problema 12`

Determinare una farrorizzazione QR della matrice

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

ed utilizzarla per calcolare M^{-1}.

`Problema 13`

Sia

$$x = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \in \mathbf{R}^2$$

Disegnare l'insieme dei punti $\hat{x} \in R^2$ che verificano la disuguaglianza:

$$\frac{N(\hat{x} - x)}{N(x)} \le 1$$

per $N = N_2$ e poi per $N = N_1$.

`Problema 14`

Determinare una fattorizzazione LR della matrice

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

utilizzando il procedimento di Doolittle. Decidere se quella trovata sia l'unica fattorizzazione LR di A esistente.

`Problema 15`

Determinare almeno due fattorizzazioni LR distinte della matrice

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

`Problema 16`

Sia

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Operando in **R**, determinare le matrici P (di permutazione), S e D (fattorizzazione LR di PA) prodotte applicando ad A la procedura `EGPP`.