Dipartimento di Matematica Applicata
« Ulisse Dini »

Problemi di Calcolo Numerico

Corso di Laurea in Ingegneria Elettronica
Corso di Laurea in Ingegneria delle Telecomunicazioni

a.a. 2007/2008

4 Interpolazione

`Problema 1`

Determinare la forma di Newton dell'elemento di $P_2(\mathbf{R})$ che interpola i dati $(0,0)$, $(1,1)$, $(-1,2)$.

`Problema 2`

Siano $W = \langle t, t^2 \rangle$, t_0, t_1 reali distinti e y_0, y_1 reali. Determinare tutti gli elementi di W che interpolano i dati (t_0, y_0), (t_1, y_1).

`Problema 3`

Mostrare che l'unico elemento di $\langle 1, t, te^t \rangle$ che si annulla per $t = 0, t = 1$ e $t = 2$ è la funzione nulla (si riformuli la domanda come problema lineare di interpolazione).

`Problema 4`

Sia $G = \langle x_1^2, x_1x_2, x_2^2 \rangle \subset \mathcal{C}(\mathbf{R}^2, \mathbf{R})$. Mostrare che per ogni y_1, y_2 e y_3 reali esiste un solo elemento di G che interpola i dati

$$(1,0), y_1 \quad ; \quad (0,1), y_2 \quad ; \quad (1,1), y_3$$

`Problema 5`

Siano $p_1, p_2 \in P_3(\mathbf{R})$. Decidere se

$$\begin{array}{rcl} p_1(0) & = & p_2(0) \\ p_1(1) & = & p_2(1) \\ p_1(-1) & = & p_2(-1) \end{array} \quad \Rightarrow \quad p_1 = p_2$$

`Problema 6`

Determinare tutti gli $\alpha \in \mathbf{R}\backslash\{0,1,-1\}$ per i quali esistono elementi di $P_2(\mathbf{R})$ che interpolano i dati

$$(-1,0) \quad , \quad (0,\tfrac{1}{2}) \quad , \quad (\alpha,1) \quad , \quad (1,0)$$

`Problema 7`

Sia N un intero positivo e $h = \frac{2}{N}$. Posto $t_j = hj$ per $j = 0,\ldots,N$, siano c la funzione di campionamento agli istanti $t_0,\ldots,t_N$ ed r la funzione di ricostruzione mediante funzioni continue lineari a tratti (su $[t_0,t_1],\ldots,[t_{N-1},t_N]$) relativa a c.

Determinare un valore di N che garantisce un errore di ricostruzione inferiore a $\frac{1}{10}$ per la funzione $\operatorname{sen} t + \cos 3t$ sull'intervallo $[0,2]$.

`Problema 8`

Siano $f(t) = \frac{1}{t}$ e $p(t)$ l'elemento di $P_1(\mathbf{R})$ che interpola i dati $(1,f(1)),(2,f(2))$. Dopo aver disegnato il grafico di f e di p per $t \in [1,2]$, Determinare (analiticamente!)

$$E = \max_{t\in[1,2]} |f(t) - p(t)|$$

e verificare che, posto

$$M_2 = \max_{t\in[1,2]} |f^{(2)}(t)| \quad \text{e} \quad h = 2-1$$

si ha

$$E < \frac{M_2}{8}h^2$$

`Problema 9`

Determinare tutti gli elementi $p \in P_2(\mathbf{R})$ per i quali la funzione

$$f(t) = \begin{cases} t & \text{per } t < 0 \\ p(t) & \text{per } t \geq 0 \end{cases}$$

risulta (continua e) derivabile su $\mathbf{R}$.

`Problema 10`

Determinare tutti gli elementi $h \in P_3(\mathbf{R})$ tali che

$$h(0) = 0 \quad , \quad h^{(1)}(0) = \frac{1}{2} \quad , \quad h(1) = 1 \quad , \quad h^{(1)}(1) = 2$$

5 Approssimazione: minimi quadrati

`Problema 1`

Si consideri $\mathbf{R}^4$ con prodotto scalare canonico e siano

$$W = \langle \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \rangle \quad , \quad v = \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad , \quad x = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Decidere se x è la migliore approssimazione di v in W nel senso dei minimi quadrati. (Suggerimento: verificare che $x \in W$ e che $v - x \perp W$.)

Problema 2

Siano

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad , \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad , \quad \hat{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Decidere se $\hat{x}$ è soluzione del sistema $Ax = b$ nel senso dei minimi quadrati. (Suggerimento: verificare che $A^{\mathsf{T}}(A\hat{x}) = A^{\mathsf{T}}b$ ovvero che $A^{\mathsf{T}}(A\hat{x} - b) = 0$.)

Problema 3

Sia $F : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ definita da

$$F(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 + (x_1 - x_2 + x_3 - 1)^2 + (x_1 - 4x_2 - 2)^2$$

Dopo aver determinato $A \in \mathbf{R}^{5\times 3}$ e $b \in \mathbf{R}^5$ tali che per ogni $x \in \mathbf{R}^3$ si abbia

$$F(x) = ||Ax - b||_2^2$$

si determini per quale $\hat{x} \in \mathbf{R}^3$ la funzione F assume valore minimo.

Problema 4

Determinare l'elemento di $\langle 1, t \rangle$ che meglio approssima i dati

$$(-2, 0) \quad , \quad (-1, 1) \quad , \quad (0, 1) \quad , \quad (1, -1) \quad , \quad (2, 0)$$

nel senso dei minimi quadrati.

Problema 5

Siano

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad , \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Determinare una fattorizzazione QR di A ed utilizzarla per risolvere il sistema $Ax = b$ nel senso dei minimi quadrati.

Problema 6

Si consideri $\mathbf{R}^4$ con prodotto scalare canonico e siano

$$W = \langle \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \rangle \quad , \quad v = \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Sia w la migliore approssimazione di v in W nel senso dei minimi quadrati. Determinare w e calcolare il residuo quadratico $\rho = ||v - w||_2^2$.

`Problema 7`

Si consideri $\mathbf{R}^4$ con prodotto scalare canonico e siano

$$W^* = \langle \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \rangle \quad , \quad v = \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Siano w^* la migliore approssimazione di v in W^* nel senso dei minimi quadrati, e $\rho^* = ||v - w^*||_2^2$ il residuo quadratico.

Confrontare i dati con quelli del Problema precedente, decidere se $\rho^* > \rho$ e *poi* determinare w^* e ρ^*.