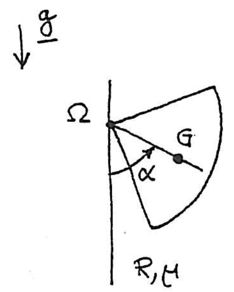
MECCANICA RAZIONALE

Testi d'esame a.a. 1997/98

Corso di laurea in Ingegneria Elettronica

Dipartimento di Matematica Applicata
« Ulisse Dini »



raggio: R
densita': μ
angolo al centro: $\pi/2$

Una lamina piana, omogenea, pesante, a forma di settore circolare, e' vincolata da una cerniera cilindrica liscia ad asse orizzontale posta in Ω.

Detta l la distanza del centro di massa G da Ω, ed I il momento d'inerzia della lamina rispetto all'asse della cerniera:

(a) si scrivano le equazioni cardinali della dinamica e da esse si derivino le equazioni del moto per la lamina;

(b) si calcoli la potenza delle reazioni vincolari durante il moto;

(c) calcolare l'energia potenziale delle forze attive in funzione dell'angolo α;

(d) all'istante $t=0$ sia $\alpha=\pi/2$, $\dot{\alpha}=0$. Si determini la reazione vincolare negli istanti in cui il segmento $G\Omega$ è verticale;

(e) sapendo che il momento di inerzia di un disco omogeneo di massa m e raggio r rispetto ad una retta contenente un diametro vale $I_0 = \frac{1}{4} m r^2$, determinare il valore di I.

(a) Le forze agenti sulla lamina sono: peso e reazioni vincolari della cerniera. Le equazioni cardinali sono dunque:

$$
\boxed{
\begin{aligned}
&(1) \qquad M \underline{a}_G = M \underline{g} + \underline{\Phi}_\Omega \\
&(2) \qquad \dot{\underline{K}}_\Omega = (G-\Omega) \wedge M \underline{g} + \underline{\Psi}_\Omega
\end{aligned}
}
$$

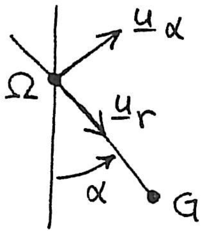
dove:

$$M = \mu \frac{\pi R^2}{4}$$

è la massa della lamina, $\underline{a}_G$ è l'accelerazione del centro di massa G e $\underline{\Phi}_\Omega$, $\underline{\Psi}_\Omega$ sono i vettori che caratterizzano (rispetto ad Ω) il sistema delle reazioni vincolari agenti sulla lamina. Poiché la cerniera è liscia, detto $\underline{u}_3$ il versore dell'asse della cerniera — orientato uscente dal piano del moto — si ha:

$$(3) \qquad \underline{\Psi}_\Omega \cdot \underline{u}_3 = 0$$

Siccome il sistema (lamina) ha un solo grado di libertà, dovremo ricavare una sola equazione del moto.



Sia $\Omega; \underline{u}_r, \underline{u}_\alpha, \underline{u}_3$ il sistema di riferimento solidale alla lamina, rappresentato in figura. Poiché Ω è fisso, ed $\Omega \underline{u}_3$ è un asse principale d'inerzia per la lamina, si ha:

$$(4) \qquad \underline{K}_\Omega = \underline{K}_\omega = I\,\underline{\omega}$$

dove $\underline{\omega} = \dot{\alpha}\,\underline{u}_3$ è la velocità angolare della lamina. Tenuto conto delle (3) e (4), l'equazione del moto si ottiene proiettando la (2) lungo l'asse $\Omega \underline{u}_3$, e risulta:

$$\boxed{I\ddot{\alpha} + Mg\,\mathrm{sen}\,\alpha = 0}$$

(b) La potenza richiesta è

$$\boxed{\begin{aligned} w^{(v)} &= \underline{\Phi}_\Omega \cdot \underline{v}_\Omega + \underline{\Psi}_\Omega \cdot \underline{\omega} \\ &= (\underline{\Psi}_\Omega \cdot \underline{u}_3)\,\dot{\alpha} = 0 \end{aligned}}$$

(c) L'energia potenziale $V(\alpha)$ si può ricavare dalla relazione:

$$-dV = d\mathcal{L}^{(a)} = M\underline{g} \cdot dG$$

Poichè

$$M\underline{g} = Mg\,(\cos\alpha\,\underline{u}_r - \mathrm{sen}\,\alpha\,\underline{u}_\alpha)$$

$$G - \Omega = \ell\,\underline{u}_r \quad , \qquad dG = \ell\,d\alpha\,\underline{u}_\alpha$$

si ha:

$$M\underline{g} \cdot dG = -Mg\ell\,\mathrm{sen}\,\alpha\,d\alpha$$

da cui

$$\boxed{V(\alpha) = -Mgl\cos\alpha}$$

(d) Dalla relazione (2) segue che, durante il moto è

$$\boxed{\underline{\Psi}_\Omega = \underline{0}}$$

Dalla (1), essendo:

$$\underline{a}_G = (G-\Omega)^{\cdot\cdot} = (l\dot{\alpha}\,\underline{u}_\alpha)^{\cdot}$$

$$= l\ddot{\alpha}\,\underline{u}_\alpha - l\dot{\alpha}^2\,\underline{u}_r$$

si ha:

$$\underline{\Phi}_\Omega = \left(Ml\ddot{\alpha}\,\underline{u}_\alpha - Ml\dot{\alpha}^2\,\underline{u}_r\right) +$$

$$- Mg\left(\cos\alpha\,\underline{u}_r - \operatorname{sen}\alpha\,\underline{u}_\alpha\right)$$

Restano da calcolare i valori di $\ddot{\alpha}$ e $\dot{\alpha}^2$ negli istanti richiesti (nei quali $\alpha = 0$). Dalla equazione del moto si ha:

$$\ddot{\alpha} = 0$$

Per quanto ricavato in (b) e (c), durante il moto si conserva l'energia meccanica della lamina. Quindi:

$$T + V = T_0 + V_0$$

Essendo

$$T = \frac{1}{2} I \dot{\alpha}^2$$

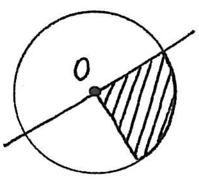
si ricava

$$\dot{\alpha}^2 = \frac{2Mg\ell}{I} \cos\alpha$$

Negli istanti considerati si ha allora

$$\boxed{\begin{aligned} \underline{\Phi}_\Omega &= -Mg\left(\frac{2M\ell^2}{I} + 1\right) \underline{u}_r \\ &= -\left(\frac{2M\ell^2}{I} + 1\right) M\underline{g} \end{aligned}}$$

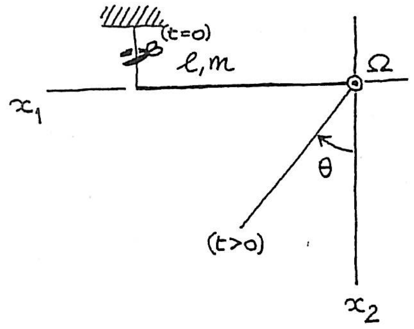
(e)



Il momento d'inerzia del disco rispetto all'asse ad esso perpendicolare e passante per il centro O vale $2 I_0$.
Il momento d'inerzia della lamina (tratteggiata in figura) rispetto allo stesso asse è allora $1/4 \cdot 2 I_0 = I_0/2$. Posto $m = 4M$, $r = R$ si ricava:

$$\boxed{I = \frac{MR^2}{2}}$$

Dipartimento di Matematica Applicata
« Ulisse Dini »



Un'asta omogenea pesante di lunghezza l e massa m ha un estremo vincolato da una cerniera cilindrica liscia ad asse orizzontale, come in figura.

Inizialmente l'asta è mantenuta in equilibrio in posizione orizzontale da un filo ideale collegato all'estremo libero (come indicato in figura).

(a) Calcolare la tensione del filo e la reazione della cerniera nella posizione di equilibrio.

(b) All'istante $t=0$ il filo viene tagliato. Si scrivano le equazioni cardinali della dinamica per l'asta, e da esse si ricavi l'equazione del moto.

(c) Si calcoli il momento d'inerzia dell'asta rispetto all'asse della cerniera.

(d) Si determinino le condizioni iniziali del moto, ed i valori iniziali di $\ddot{\theta}$ e della reazione vincolare.

(e) Calcolare il vettore velocità angolare $\underline{\omega}$ nell'istante in cui l'asta, durante il moto individuato dalle condizioni iniziali determinate nel punto precedente, passa, per la prima volta, dalla posizione verticale.

Via Bonanno Pisano, 25B - Tel. + 39 50 500065 - Fax + 39 50 49344 - Via Diotisalvi, 2 - Tel. + 39 50 554096 - 56126 Pisa (Italy)

(a) Indicate con $\underline{\tau}$ la tensione del filo, e con $\underline{\Phi}$ e $\underline{\Psi}_\Omega$ la risultante ed il mom. risultante rispett. del sistema di reazioni che la cerniera esercita sull'asta, si ha:

$$\underline{\tau} = -\tau \, \underline{1}'_2 \quad , \quad \tau \geq 0$$

$$\underline{\Psi}_\Omega \cdot \underline{1}'_3 = 0 .$$

le eq.ni cardinali della statica, per l'asta, sono

(1) $\underline{\mathcal{R}} = \underline{\tau} + m\underline{g} + \underline{\Phi} = \underline{0}$

(2) $\underline{\mathcal{M}}_\Omega = (A-\Omega)\wedge\underline{\tau} + (G-\Omega)\wedge m\underline{g} + \underline{\Psi}_\Omega = \underline{0}$

Proiettando la (2) lungo l'asse Ωx_3 si ricava:

$$\boxed{\tau = \frac{1}{2} mg} \qquad (>0\,!)$$

dalla (1) segue, sostituendo:

$$\boxed{\underline{\Phi} = -\frac{1}{2} mg \, \underline{1}'_2}$$

e dalla (2):

$$\boxed{\underline{\Psi}_\Omega = \underline{0}}$$

(b) le eq.ni cardinali della dinamica, per l'asta, sono:

(3) $$\boxed{m\underline{a}_G = m\underline{g} + \underline{\Phi}}$$

(4) $$\boxed{\dot{\underline{K}}_\Omega = (G-\Omega) \wedge m\underline{g} + \underline{\psi}_\Omega}$$

Poichè $\underline{v}_\Omega = \underline{0}$, è $\underline{K}_\Omega = \underline{K}_\omega$; poichè $\underline{\omega} = -\dot{\theta}\,\underline{1}_3$ è parallelo ad un asse principale d'inerzia dell'asta, è $\underline{K}_\omega = I_\Omega\,\underline{\omega}$, con I_Ω momento d'inerzia dell'asta rispetto all'asse Ωx_3.
L'equazione (4) si riscrive allora

(5) $$-I_\Omega\,\ddot{\theta}\,\underline{1}'_3 = mg\,\frac{\ell}{2}\,\mathrm{sen}\,\theta\,\underline{1}'_3 + \underline{\psi}_\Omega$$

Proiettando quest'ultima lungo l'asse Ωx_3 si ottiene l'equazione del moto richiesta:

$$\boxed{\ddot{\theta} + \frac{mg}{I_\Omega}\,\frac{\ell}{2}\,\mathrm{sen}\,\theta = 0}$$

(c) Dalla definizione di momento d'inerzia di un corpo rispetto ad un asse si calcola:

$$\boxed{I_\Omega = \frac{1}{3} m \ell^2}$$

(d) All'istante $t = 0$ è

$$\boxed{\theta(0) = \pi/2 \quad , \quad \dot{\theta}(0) = 0}$$

dunque, dall'eq.ne del moto ricavata in (b) si ricava (per sostituzione):

$$\boxed{\ddot{\theta}(0) = -\frac{3}{2}\,\frac{g}{\ell}}$$

[Oss.

$$[\ddot{\theta}] = T^{-2}$$

$$[g/\ell] = \frac{\cancel{L}\, T^{-2}}{\cancel{L}} = T^{-2}$$

]

Dalla (5), considerando l'eq.ne del moto, si ha:

$$\boxed{\underline{\psi}_\Omega = \underline{0}}$$

[Oss. Il vettore $\underline{\psi}_\Omega$ è sempre nullo durante il moto.]

Poichè

$$\underline{a}_G(0) = -\frac{\ell}{2}\ddot{\theta}(0)\,\underline{i}_2 - \frac{\ell}{2}\dot{\theta}^2(0)\,\underline{i}_1$$

$$= \frac{3}{4} g\, \underline{i}_2$$

dalla (3), valutata per $t=0$ si ha:

$$\boxed{\underline{\phi} = -\frac{1}{4} mg\, \underline{i}_2}$$

(e) Per il sistema in esame (soggetto all'azione di vincoli lisci e fissi) indicata con $w^{(a)}$ la potenza delle forze attive, e con $w^{(v)}$ quella delle reazioni vincolari, si ha

$$w^{(a)} = \underline{mg} \cdot \underline{v}_G = \left(mg\frac{\ell}{2}\cos\theta\right)^{\bullet}$$

$$w^{(v)} = \underline{\phi} \cdot \underline{v}_\Omega + \underline{\psi}_\Omega \cdot \underline{\omega} = 0$$

Quindi, posto $V(\theta) = -mg\,\frac{\ell}{2}\cos\theta$:

$$w^{(a)} = -\dot{V} .$$

Allora, indicando con T l'energia cinetica dell'asta, per il Teorema delle Forze Vive si ha:

$$(T+V)^{\cdot} = 0 \qquad (6)$$

Essendo $T = \frac{1}{2} I_\Omega \dot{\theta}^2$, dalla (6) si ricava che, durante il moto individuato dalle condizioni iniziali determinate in (d) è:

$$\frac{1}{2} I_\Omega \dot{\theta}^2 - mg\,\frac{\ell}{2}\cos\theta = 0$$

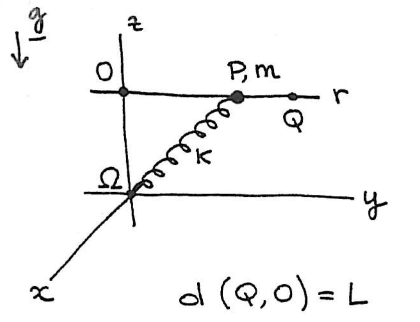
All'istante richiesto (in cui $\theta = 0$) vale quindi

$$\dot{\theta} = 3\,\frac{g}{\ell}$$

e, poichè in tale istante è $\dot{\theta} < 0$:

$$\boxed{\underline{\omega} = \sqrt{3\,\frac{g}{\ell}}\;\underline{i}'_3}$$

Dipartimento di Matematica Applicata
« Ulisse Dini »



Un punto P pesante, di massa m, e' libero di scorrere su una retta r, orizzontale, priva di attrito.
Il punto P è attratto verso il punto fisso Ω da una molla di costante elastica K e lunghezza a riposo nulla.

La retta r si muove nello spazio, ed ha equazione

$$r: \begin{cases} x = 0 \\ z = L\,(3 - \operatorname{sen} \omega t) \end{cases}$$

L, ω costanti positive, note.

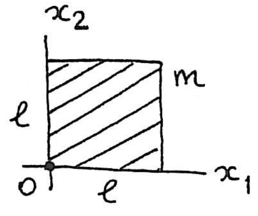
(a) Determinare il moto relativo di P su r, supponendo che per $t=0$ il punto sia fermo (rispetto ad r) in Q. Se il moto e' periodico, indicarne il periodo.

(b) Si determini la reazione vincolare durante il moto, e la sua potenza nel sistema di riferimento fisso.

(c) Nel caso in cui $\omega = \sqrt{K/m}$, si determini la traiettoria di P nel sistema di riferimento fisso, e la si rappresenti graficamente.

(d) Nel sistema di riferimento relativo, si calcoli l'energia cinetica del punto e si verifichi la tesi del Teorema delle Forze Vive durante il moto determinato in (a).

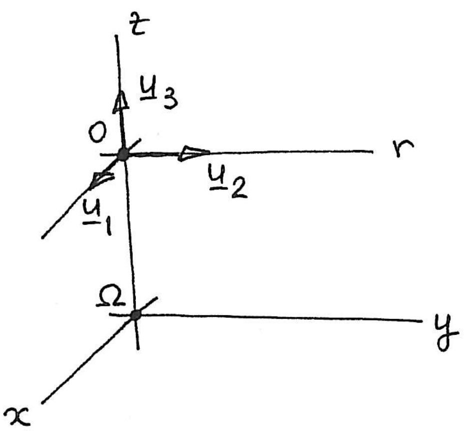
(e)



Per la lamina quadrata omogenea di lato ℓ e massa m di figura, si determini il tensore di inerzia relativo al sistema di riferimento indicato.

Via Bonanno Pisano, 25B - Tel. + 39 50 500065 - Fax + 39 50 49344 - Via Diotisalvi, 2 - Tel. + 39 50 554096 - 56126 Pisa (Italy)

(a) Sia $O; \underline{u}_1, \underline{u}_2, \underline{u}_3$ il sistema di riferimento, scelto dallo osservatore $\mathcal{O}_R$ solidale alla retta r (e quindi non inerziale), con $O\underline{u}_2 \parallel r$, ed $O\underline{u}_3$ verticale come nella figura seguente.



Per l'osservatore $\mathcal{O}_R$ le forze agenti su P sono: il peso $m\underline{g}$, la forza elastica $\underline{F}_{el}$, la reazione $\underline{\varphi}$ e le forze apparenti $-m\underline{a}^{(t)}$ (di trascinamento), $-m\underline{a}^{(c)}$ (complementari). Detta $\underline{a}^{(r)}$ l'accelerazione di P misurata da $\mathcal{O}_R$, la prima eq.ne cardinale della dinamica è

$$(1) \qquad m\underline{a}^{(r)} = m\underline{g} + \underline{F}_{el} + \underline{\varphi} - m\underline{a}^{(t)} - m\underline{a}^{(c)}$$

Inoltre, essendo nulla la velocità angolare di $\mathcal{O}_R$ rispetto all'osservatore fisso $\mathcal{O}_F$:

$$\underline{a}^{(r)} = \ddot{y}\,\underline{u}_2$$
$$\underline{a}^{(t)} = \underline{a}_0 = (O-\Omega)^{\cdot\cdot} = L\omega^2 \operatorname{sen}\omega t\, \underline{u}_3$$
$$\underline{a}^{(c)} = \underline{0}.$$

Infine: $\qquad m\underline{g} = -mg\,\underline{u}_3$

$$\underline{F}_{el} = -k(P-\Omega) = -k\left[y\underline{u}_2 + L(3-\operatorname{sen}\omega t)\,\underline{u}_3\right]$$

$$\underline{\varphi} \cdot \underline{u}_2 = 0 \quad \text{(vincolo liscio)}$$

Sostituendo nella (1) e proiettando lungo l'asse Ou_2 si ottiene l'eq.ne del moto relativo:

$$(2) \qquad m\ddot{y} + ky = 0$$

Il moto richiesto è quello individuato dalla (2) e dalle condizioni iniziali $y(0) = L$, $\dot{y}(0) = 0$. Posto $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ si ha:

$$\boxed{y(t) = L \cos \omega_0 t}$$

Il moto relativo risulta periodico, con periodo

$$\boxed{T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}}$$

[Oss. $\left[\sqrt{\frac{m}{k}}\right] = \left(\frac{M}{MLT^{-2} \cdot L^{-1}}\right)^{1/2} = T$.]

(b) La reazione vincolare, noto il moto, si ricava dalla (1):

$$\boxed{\underline{\varphi} = \left[mg + 3kL + (m\omega^2 - k)L \operatorname{sen} \omega t\right] \underline{u}_3}$$

Sia $\underline{v}$ la velocità di P misurata da $\mathcal{O}_F$. Si ha:

$$\underline{v} = \dot{y}\,\underline{j} - \omega L \cos\omega t\,\underline{k}$$

la potenza richiesta è, allora:

$$\boxed{\underline{\varphi} \cdot \underline{v} = -\omega L\,(mg + 3kL)\cos\omega t + -\frac{1}{2}\,\omega L^2\,(m\omega^2 - k)\,\text{sen}\,\omega t}$$

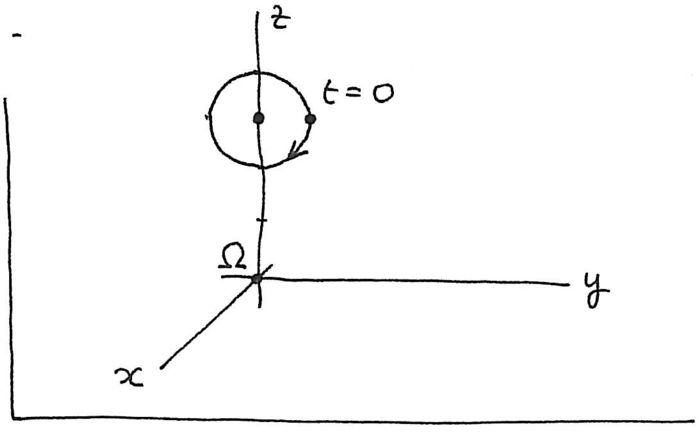
(c) Siccome $P - \Omega = (P - O) + (O - \Omega)$, nel caso $\omega = \omega_0$ si ha:

$$\begin{cases} x(t) = 0 \\ y(t) = L\cos\omega_0 t \\ z(t) = L\,(3 - \text{sen}\,\omega_0 t) \end{cases}$$

e la traiettoria è la circonferenza di centro $(0, 0, 3L)$ e raggio L di equazione

$$\boxed{L^2 = y^2 + (z - 3L)^2}$$

rappresentata in figura.



(d) Detta $\underline{v}^{(r)}$ la velocità di P misurata da O_R, si ha:

(3) $$\boxed{T^{(r)} = \frac{1}{2}\,m\,(\underline{v}^{(r)})^2 = \frac{1}{2}\,m\,\omega_0^2\,L^2\,\text{sen}^2\omega_0 t}$$

Il Teorema delle Forze Vive, riguardo alle grandezze misurate da O_R, afferma che, durante il moto di P si ha

$$\left(T^{(r)}\right)^{\bullet} = w^{(r)}$$

dove $w^{(r)}$, potenza delle forze agenti su P misurata da O_R, vale

$$w^{(r)} = \left[m\underline{g} + \underline{F}_{el} + \underline{\varphi} - m\underline{a}^{(t)} - m\underline{a}^{(c)} \right] \cdot \underline{v}^{(r)}$$

$$= -ky\dot{y} = m\omega_0^3 L^2 \operatorname{sen}\omega_0 t \cos\omega_0 t .$$

Derivando la (3) rispetto al tempo si ha

$$\left(T^{(r)}\right)^{\bullet} = m\omega_0^3 L^2 \operatorname{sen}\omega_0 t \cos\omega_0 t .$$

(e) Poichè per tutti i punti della lamina la terza coordinata è nulla, si ha:

$$D = E = 0 .$$

Inoltre:

$$A = \int_{\mathcal{C}} \mu\, d^2(P, Ox_1)\, d\mathcal{C} = \int_0^\ell \int_0^\ell \frac{m}{\ell^2} x_2^2\, dx_1\, dx_2 =$$

$$= \frac{1}{3} m\ell^2$$

$$B = A \quad , \quad C = A + B = \frac{2}{3} m\ell^2$$

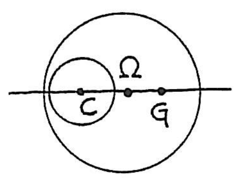
$$F = F_0 + m x_1^G x_2^G = \frac{1}{4} m\ell^2$$

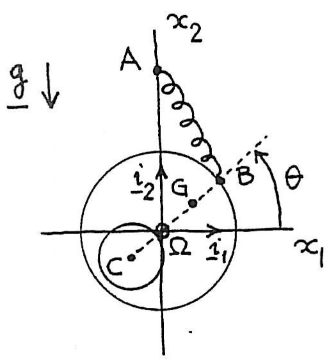
essendo F_0 il valore del momento centrifugo "F" relativo al sistema di riferimento parallelo a quello dato ma con origine in G (è $F_0 = 0$, essendo il sistema di riferimento principale baricentrale di inerzia) ed x_1^G, x_2^G, x_3^G le coordinate di G nel s.r. assegnato. Allora:

$$\boxed{\sigma = ml^2 \begin{bmatrix} 1/3 & -1/4 & 0 \\ -1/4 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 2/3 \end{bmatrix}}$$

Dipartimento di Matematica Applicata
« Ulisse Dini »

Sia $\mathcal{C}$ il corpo omogeneo piano di densità μ ottenuto praticando un foro circolare di raggio r in un disco di raggio R (figura a fianco). Sia G il centro di massa di $\mathcal{C}$. La distanza tra G ed Ω è $R/6$, quella tra C ed Ω è $R/2$.





Il corpo $\mathcal{C}$, pesante, è vincolato in Ω da una cerniera cilindrica liscia e fissa, ad asse orizzontale. Il punto B di $\mathcal{C}$ è collegato da una molla di costante elastica k e lunghezza a riposo nulla, al punto A di coordinate $(0, 2R, 0)$. Detto I_Ω il momento di inerzia di $\mathcal{C}$ rispetto all'asse $\Omega \underline{i}_3$:

(a) si scriva la seconda equazione cardinale della dinamica per il corpo $\mathcal{C}$, e da essa si ricavi l'equazione del moto;

(b) si determinino le posizioni di equilibrio del corpo, al variare dei valori dei parametri del sistema;

(c) dopo aver dato la definizione di stabilità di una posizione d'equilibrio del corpo, si discuta, nel caso $2kR - \frac{mg}{6} = 0$, la stabilità della posizione di equilibrio corrispondente a $\theta = 0$;

(d) si determini (in funzione di R) il valore di r;

(e) si determini il valore di I_Ω.

Via Bonanno Pisano, 25B - Tel. + 39 50 500065 - Fax + 39 50 49344 - Via Diotisalvi, 2 - Tel. + 39 50 554096 - 56126 Pisa (Italy)

(a) le forze agenti sul corpo $\mathcal{C}$ sono: il peso $m\underline{g}$, la forza elastica $\underline{F}_{el}$ ed il sistema di reazioni vincolari esercitato dalla cerniera, caratterizzato dai vettori $\underline{\Phi}_\Omega$ e $\underline{\Psi}_\Omega$. La seconda equazione cardinale della dinamica, con polo Ω (fisso) si scrive:

$$(1) \qquad \boxed{\dot{\underline{K}}_\Omega = (G-\Omega)\wedge m\underline{g} + (B-\Omega)\wedge \underline{F}_{el} + \underline{\Psi}_\Omega}$$

la velocità angolare di $\mathcal{C}$ risulta $\underline{\omega} = \dot{\theta}\,\underline{1}'_3$ (θ indicato nel testo); poichè l'asse $\Omega\,\underline{1}'_3$ è principale d'inerzia per $\mathcal{C}$ (il corpo è piano) è $\underline{K}_\Omega = I_\Omega\,\dot{\theta}\,\underline{1}'_3$. Inoltre: $\underline{F}_{el} = k\,(A-B)$ e $\underline{\Psi}_\Omega \cdot \underline{1}'_3 = 0$ (la cerniera cilindrica è liscia). Proiettando allora la (1) lungo l'asse $\Omega\,\underline{1}'_3$ si ha la equazione del moto:

$$(2) \qquad \boxed{I_\Omega\,\ddot{\theta} + \left(\frac{mg}{6} - 2kR\right) R\cos\theta = 0}$$

(b) Le posizioni di equilibrio di $\mathcal{C}$ si possono ricavare dalla (2) cercandone le soluzioni costanti. θ_0 è posizione di equilibrio se:

$$\left(\frac{mg}{6} - 2kR\right) R\cos\theta_0 = 0 .$$

Se $\frac{mg}{6} - 2kR = 0$, qualsiasi θ_0 è di equilibrio; altrimenti, gli angoli che individuano configurazioni di equilibrio sono $\theta_0 = \pi/2$ e $\theta_0 = 3\pi/2$.

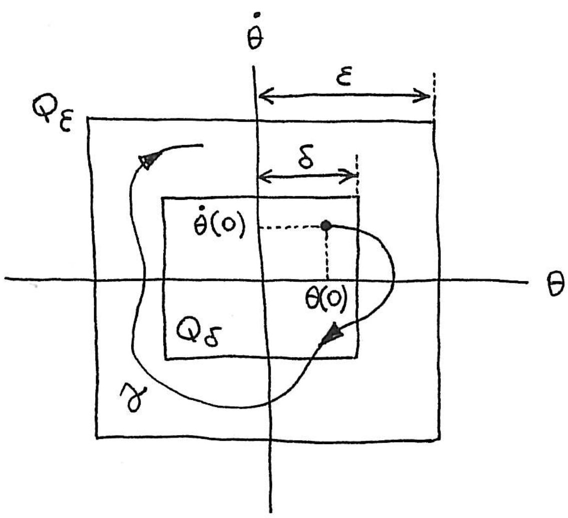
(c) Consideriamo la posizione di equilibrio $\theta = 0$. Tale posizione è stabile se per valori iniziali $\theta(0)$ sufficientemente piccoli e per velocità angolari $\dot{\theta}(0)$ sufficientemente piccole, sia l'angolo $\theta(t)$ sia la velocità angolare $\dot{\theta}(t)$ superano valori arbitrariamente piccoli (ma preassegnati) durante il moto seguente le condizioni iniziali $\theta(0)$ e $\dot{\theta}(0)$. Analiticamente, la posizione di equilibrio $\theta = 0$ è stabile se:

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists \delta \text{ t.c.}$$

$$|\theta(0)| < \delta, \ |\dot{\theta}(0)| < \delta \Rightarrow |\theta(t)| < \varepsilon, \ |\dot{\theta}(t)| < \varepsilon$$

per ogni $t \geq 0$.

Geometricamente:



se l'origine $(\theta = 0, \dot{\theta} = 0)$ corrisponde ad un moto stabile, dato comunque il quadrato Q_ε di lato 2ε, esiste un quadrato (più piccolo) Q_δ di lato 2δ tale che se il moto ha origine in un qualsiasi punto al suo interno, la "traiettoria" γ seguente rimarrà sempre all'interno di Q_ε.

Passiamo alla discussione della stabilità della posizione $\theta = 0$ nel caso in esame. Se $2KR - \frac{mg}{6} = 0$, la (2) si riduce a $\ddot{\theta} = 0$, e quindi, dette $\theta(0)$ e $\dot{\theta}(0)$ le condizioni iniziali, è

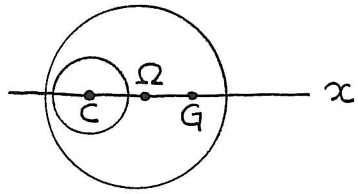
$$\theta(t) = \dot{\theta}(0)\, t + \theta(0)$$

Si nota immediatamente che, se $\dot{\theta}(0) \neq 0$ (piccolo quanto si vuole, ma non nullo) $\theta(t)$ è non limitata. Allora, comunque sia scelto il quadrato Q_δ, al suo interno esistono punti che danno luogo a moti che non restano interni a Q_ε. Ne segue che la posizione di equilibrio $\theta = 0$ non è stabile.

(d) Il valore di r è determinato dalla posizione del centro di massa G di $\mathcal{C}$. Supponendo $r \leq R/2$, si ha:

$$(3) \qquad \mu\pi(R^2 - r^2)\, x_G = \int_{\mathcal{C}} \mu x \, d\mathcal{C}$$

(vedere la figura a lato).



Indicato con $\mathcal{B}$ il disco di densità μ e raggio R, e con $\mathcal{T}$ il disco di densità μ e raggio r tali che:

$$(4a) \qquad \mathcal{B} = \mathcal{C} \cup \mathcal{T}$$

$$(4b) \qquad \mathring{\mathcal{C}} \cap \mathring{\mathcal{T}} = \emptyset$$

si ha:

$$(5) \qquad \int_{\mathcal{C}} \mu x \, d\mathcal{C} = \int_{\mathcal{B}} \mu x \, d\mathcal{B} - \int_{\mathcal{T}} \mu x \, d\mathcal{T}$$

Il centro di massa di $\mathcal{B}$ è in Ω ($x_\Omega = 0$), quello di

τ in C ($x_C = -R/2$). Dunque:

$$\int_{\mathcal{B}} \mu x \, d\mathcal{B} = 0, \qquad \int_{\tau} \mu x \, d\tau = \mu \pi r^2 \left(-\frac{R}{2}\right).$$

Tenuto conto delle (3) e (5), e del fatto che $x_G = \frac{R}{6}$ si ha che:

$$\mu \pi (R^2 - r^2) \frac{R}{6} = \mu \pi r^2 \frac{R}{2}$$

da cui:

$$\boxed{r = R/2}$$

(e) Dalla definizione si ha:

$$I_\Omega = \int_{\mathcal{C}} \mu d^2(P, \Omega) \, d\mathcal{C} .$$

Per le (4a) e (4b) vale la relazione:

$$\int_{\mathcal{B}} \mu d^2(P,\Omega) \, d\mathcal{B} = \int_{\mathcal{C}} \mu d^2(P,\Omega) \, d\mathcal{C} + \int_{\tau} \mu d^2(P,\Omega) \, d\tau$$

quindi:

$$I_\Omega = I(\mathcal{B}, \Omega \underline{i}'_3) - I(\tau, \Omega \underline{i}'_3) .$$

Poichè

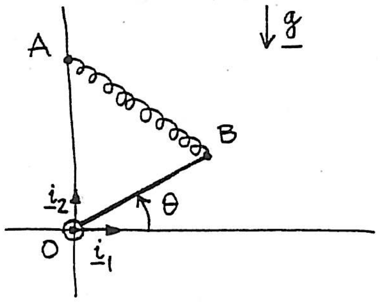
$$I(\mathcal{B}, \Omega \underline{i}'_3) = \frac{1}{2} (\mu \pi R^2) R^2$$

$$I(\tau, \Omega \underline{i}'_3) = \frac{1}{2} \left(\mu \pi \frac{R^2}{4}\right) \frac{R^2}{4} + \left(\mu \pi \frac{R^2}{4}\right) \frac{R^2}{4}$$

si ha:

$$\boxed{I_\Omega = \frac{13}{32} \mu \pi R^4}$$

Dipartimento di Matematica Applicata
« Ulisse Dini »



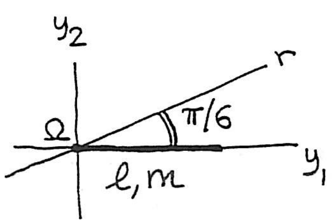
Un'asta omogenea pesante, di lunghezza ℓ e massa m, ha un estremo (O) vincolato da una cerniera cilindrica liscia e fissa, ad asse orizzontale (parallelo ad $O\underline{i}_3$). L'asse $O\underline{i}_2$ è verticale. L'altro estremo dell'asta (B) è connesso ad un punto fisso A di coordinate $(0, 2\ell, 0)$ da una molla di costante elastica k e lunghezza a riposo nulla.

(a) Si scriva la 2ª equazione cardinale della dinamica per l'asta, e da essa si derivi l'equazione del moto.

(b) Si determini l'energia meccanica del sistema, e si verifichi che si mantiene costante durante il moto.

(c) Supponendo che $mg\frac{\ell}{2} - 2k\ell^2 < 0$, e che $\theta(0) = \pi/2$, $\dot{\theta}(0) = \dot{\theta}_0 < 0$, si determini il valore di k tale che durante il moto si abbia $\theta_{min} = 0$.

(d) Si determini il tensore d'inerzia dell'asta relativo alla terna $\Omega y_1 y_2 y_3$ di figura, e poi il momento d'inerzia dell'asta rispetto alla retta r.



(a) Le forze agenti sull'asta sono: il peso $m\underline{g}$, la forza elastica $\underline{F}_{el}$ e la reazione vincolare che esercita la cerniera. La 2^a equazione cardinale della dinamica, con polo O, si scrive quindi

$$(1) \qquad \boxed{\dot{\underline{K}}_O = (G-O)\wedge m\underline{g} + (B-O)\wedge \underline{F}_{el} + \underline{\Psi}_O}$$

dove G è il centro di massa dell'asta, $\underline{F}_{el} = -k(B-A)$ e $\underline{\Psi}_O$ è il momento risultante rispetto ad O del sistema di forze vincolari. Poichè la cerniera cilindrica è liscia, si ha: $\underline{\Psi}_O \cdot \underline{1}'_3 = 0$; inoltre, essendo il suo asse principale d'inerzia per l'asta, è: $\underline{K}_O = I_O \underline{\omega}$, con $\underline{\omega} = \dot{\theta}\,\underline{1}'_3$ e I_O momento d'inerzia rispetto all'asse $O\underline{1}'_3$. L'equazione (differenziale) del moto si ricava dalla (1) proiettandola lungo l'asse $O\underline{1}'_3$:

$$(2) \qquad \boxed{I_O\ddot{\theta} + \left(\frac{1}{2}mgl - 2kl^2\right)\cos\theta = 0}$$

(b) Detta $\mathcal{T}$ l'energia cinetica e $\mathcal{V}$ quella potenziale dell'asta, si ha:

$$\mathcal{T} = \frac{1}{2} I_O \dot{\theta}^2 \quad ; \quad \mathcal{V} = \left(\frac{1}{2}mgl - 2kl^2\right) \operatorname{sen}\theta$$

L'energia meccanica è allora:

$$\boxed{\mathcal{E} = \frac{1}{2} I_O \dot{\theta}^2 + \left(\frac{1}{2}mgl - 2kl^2\right)\operatorname{sen}\theta}$$

Si ha allora, derivando:

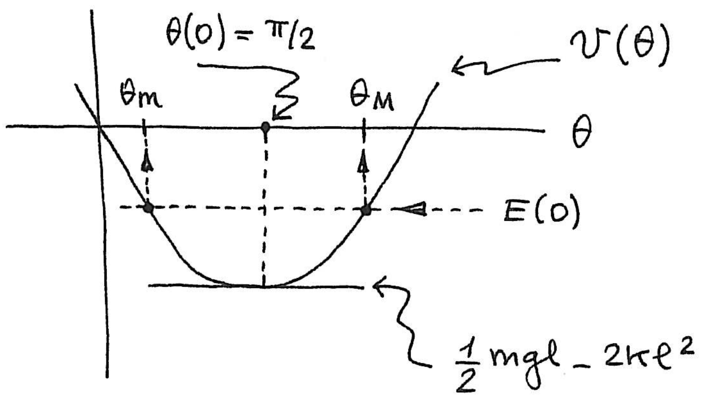
$$\dot{\mathcal{E}} = \left[I_o \ddot{\theta} + \left(\frac{1}{2} mgl - 2kl^2 \right) \cos\theta \right] \dot{\theta}$$

Poiché durante il moto $\theta(t)$ verifica l'equazione (2), risulta $\dot{\mathcal{E}} = 0$, cioè l'energia meccanica resta costante.

(c) I valori estremi di θ durante il moto sono assunti in istanti in cui $\dot{\theta} = 0$. Durante il moto specificato si ha, per quanto determinato in (b):

$$\frac{1}{2} I_o \dot{\theta}^2 + \left(\frac{1}{2} mgl - 2kl^2 \right) \operatorname{sen}\theta =$$

$$= \frac{1}{2} I_o \dot{\theta}_o^2 + \left(\frac{1}{2} mgl - 2kl^2 \right) \equiv E(0)$$



$\theta(t) \in [\theta_m, \theta_M]$

Come risulta evidente dal grafico a fianco, la condizione da imporre perché $\theta_m = 0$ è $E(0) = 0$. Allora dovrà essere

$$\boxed{k = \frac{I_o \dot{\theta}_o^2}{4l^2} + \frac{mg}{4l}}$$

Oss. Controllo dimensionale

$$[k] = MLT^{-2} \cdot L^{-1} = MT^{-2}$$

$$\left[\frac{I_o \dot{\theta}_o^2}{4l^2} \right] = \frac{ML^2 \cdot T^{-2}}{L^2} = MT^{-2}$$

$$\left[\frac{mg}{4\ell}\right] = \frac{MLT^{-2}}{L} = MT^{-2}$$

(d) Indicando con μ la densità materiale dell'asta, dalle definizioni si ha:

$$A = \int_{\mathcal{C}} \mu \, d^2(P, \Omega y_1) \, d\ell = 0$$

$$B = \int_{\mathcal{C}} \mu \, d^2(P, \Omega y_2) \, d\ell = \int_0^{\ell} \mu y_1^2 \, dy_1 = \frac{1}{3} m\ell^2$$

$$C = A + B = \frac{1}{3} m\ell^2$$

$$D = E = 0 \, , \quad F = \int_{\mathcal{C}} \mu \, y_1 y_2 \, d\ell = 0$$

La terna assegnata è quindi principale d'inerzia. Il tensore è:

$$\boxed{\sigma = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3}m\ell^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3}m\ell^2 \end{bmatrix}}$$

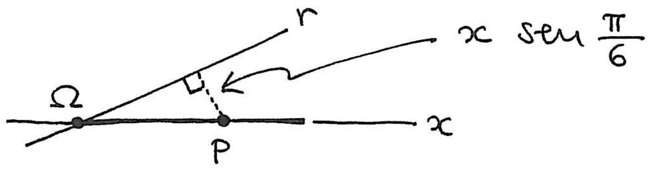
Detta $\underline{\alpha}$ la colonna dei coseni direttori di r nel sistema di riferimento assegnato, si ha:

$$\underline{\alpha} = \begin{bmatrix} \sqrt{3}/2 \\ 1/2 \\ 0 \end{bmatrix} .$$

Il momento d'inerzia richiesto vale allora

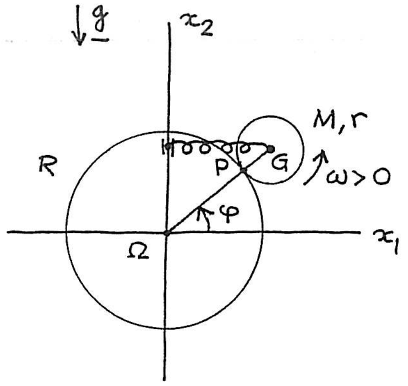
$$\boxed{I_r = \underline{\alpha} \cdot \sigma \underline{\alpha} = \frac{1}{12} m \ell^2}$$

Allo stesso risultato si arriva con il calcolo diretto:



$$I_r = \int_0^{\ell} \mu \left(\frac{x}{2}\right)^2 dx \,.$$

Dipartimento di Matematica Applicata
« Ulisse Dini »



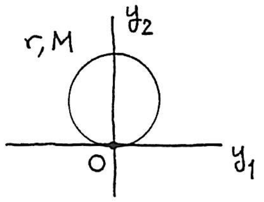
Un disco omogeneo di raggio r e massa M rotola senza strisciare su un altro disco (fisso) di raggio R. I centri Ω e G dei due dischi sono collegati da un'asta di massa trascurabile in modo che, durante il moto, la distanza tra di essi resta costante. Una molla di costante elastica k e lunghezza a riposo nulla attrae il punto G verso l'asse Ωx_2, rimanendo sempre orizzontale. Sia φ l'angolo indicato in figura.

(1) Calcolare l'energia potenziale delle forze attive in funzione di φ;

(2) utilizzando le equazioni di Lagrange, ricavare la equazione del moto del sistema;

(3) dire per quali valori di k il sistema ha due sole configurazioni di equilibrio e, in tal caso, discuterne la stabilità;

(4) nelle condizioni determinate in (3), siano $\varphi(0) = \pi/4$ e $\dot{\varphi}(0) = 0$; si calcoli $\underline{K}_P$ quando, durante il moto, φ si annulla per la prima volta.



(5) Sia I_1 il momento d'inerzia del disco rispetto all'asse Oy_1 e I_2 quello rispetto all'asse Oy_2. Determinare la relazione tra I_1 ed I_2.

Via Bonanno Pisano, 25B - Tel. + 39 50 500065 - Fax + 39 50 49344 - Via Diotisalvi, 2 - Tel. + 39 50 554096 - 56126 Pisa (Italy)

(1) Il sistema è costituito dal disco piccolo, ha un grado di libertà, e come parametro lagrangiano può essere assunto φ; le forze attive su esso agenti sono: il peso e la forza elastica. Si ha:

$$d\mathcal{L}^{(a)} = M\underline{g} \cdot dG + \underline{F}_{el} \cdot dG$$

dove

$$M\underline{g} = -Mg\,\underline{1}'_2$$

$$\underline{F}_{el} = -k x_1 \underline{1}'_1 = -k(R+r)\cos\varphi\,\underline{1}'_1$$

$$G-\Omega = (R+r)\left(\cos\varphi\,\underline{1}'_1 + \operatorname{sen}\varphi\,\underline{1}'_2\right)$$

allora:

$$d\mathcal{L}^{(a)} = -Mg(R+r)\cos\varphi\,d\varphi + $$
$$+ k(R+r)^2 \operatorname{sen}\varphi\cos\varphi\,d\varphi$$

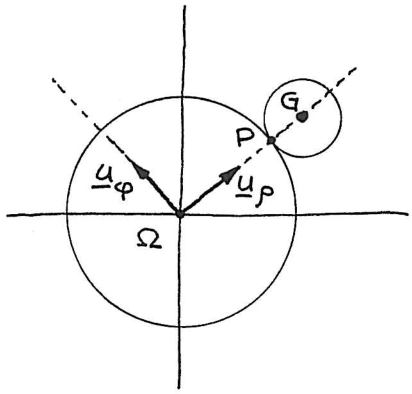
dunque un'energia potenziale è

$$\boxed{V(\varphi) = (R+r)\left[Mg\operatorname{sen}\varphi - \frac{1}{2}k(R+r)\operatorname{sen}^2\varphi\right]}$$

(2) la lagrangiana del sistema è $L = T - V$, dove T è l'energia cinetica e vale

$$T = \frac{1}{2}M v_G^2 + \frac{1}{2}I\underline{\omega}^2$$

con $\underline{v}_G$ velocità di G, I momento d'inerzia del disco rispetto all'asse per G parallelo ad Ωx_3, $\underline{\omega}$ velocità angolare del disco. Detto P il punto di contatto tra i due dischi, si ha, per il rotolamento puro:



$$\underline{0} = \underline{v}_P = \underline{v}_G + \underline{\omega} \wedge (P-G)$$
$$= \left[(R+r)\dot{\varphi} - \omega r \right] \underline{u}_\varphi$$

avendo posto $\underline{\omega} = \omega \underline{1}'_3$ (il moto del disco piccolo e' piano). Quindi:

$$\underline{\omega} = \frac{R+r}{r} \dot{\varphi} \; \underline{1}'_3$$

e allora $\quad T = \frac{1}{2} M (R+r)^2 \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} I \left(\frac{R+r}{r}\right)^2 \dot{\varphi}^2$

e

$$L = \frac{1}{2} (R+r)^2 \left(M + \frac{I}{r^2} \right) \dot{\varphi}^2 +$$
$$- (R+r) \left[Mg \operatorname{sen}\varphi - \frac{1}{2} k (R+r) \operatorname{sen}^2\varphi \right].$$

L'equazione del moto risulta

$$(*) \qquad \boxed{\ddot{\varphi} + \frac{Mg \cos\varphi - k(R+r) \operatorname{sen}\varphi \cos\varphi}{(R+r)\left(M + \frac{I}{r^2}\right)} = 0}$$

(3) le posizioni di equilibrio si ottengono dalla (*):

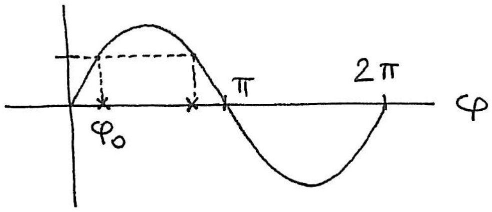
$$Mg \cos\varphi - k(R+r) \operatorname{sen}\varphi \cos\varphi = 0$$

dunque $\quad \cos\varphi = 0 \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{2}, \; \varphi = \frac{3\pi}{2}$

$$Mg - k(R+r) \operatorname{sen}\varphi = 0.$$

se $\frac{Mg}{k(R+r)} < 1$, sono posizioni di equilibrio anche

$\varphi = \varphi_0$, $\varphi = \pi - \varphi_0$



(vedere figura a lato). I valori di k richiesti sono quindi:

$$\boxed{k \leq \frac{Mg}{R+r}}$$

Per la stabilita' si ha:

$$V''\left(\frac{3\pi}{2}\right) = (R+r)\left[Mg + k(R+r)\right] > 0$$

$\Rightarrow \varphi = \frac{3\pi}{2}$ posizione di equilibrio <u>stabile</u>.

se $k < \frac{Mg}{R+r}$, $V''(\pi/2) < 0 \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{2}$ posizione di equilibrio <u>instabile</u>;

se $k = \frac{Mg}{R+r}$, $V'(\varphi) = Mg(R+r)\cos\varphi\,(1 - \operatorname{sen}\varphi)$; siccome $V' > 0$ per $\varphi < \pi/2$, $V' < 0$ per $\varphi > \pi/2$, per $\varphi = \pi/2$ l'energia potenziale ha un massimo isolato $\Rightarrow$ equilibrio <u>instabile</u>.

(4) Poichè Px_3 è asse principale d'inerzia per il disco, si ha: $\underline{K}_P = I'\underline{\omega}$, dove I' è il momento di inerzia del disco rispetto alla retta Px_3. Bisogna quindi calcolare $\underline{\omega}$ nell'istante considerato.
Poichè le forze attive sono conservative, e le reazioni vincolari esplicano potenza nulla, durante il moto si conserva l'energia meccanica:

$$T+V\Big|_{t=0} = T+V\Big|_{t^*:\ \varphi(t^*)=0}$$

ossia:

$$0 + (R+r)\left[\frac{\sqrt{2}}{2} Mg - \frac{1}{4} k (R+r)\right] =$$

$$= \frac{1}{2}(R+r)^2\left(M + \frac{I}{r^2}\right)\dot{\varphi}^2 + 0$$

da cui:

$$\dot{\varphi}^2 = \frac{\sqrt{2}\, Mg - \frac{1}{2} k (R+r)}{(R+r)\left(M + I/r^2\right)} \qquad (>0!)$$

e

$$\underline{\omega} = \frac{\frac{1}{2} k (R+r) - \sqrt{2}\, Mg}{(R+r)\left(M + I/r^2\right)}\, \dot{\underline{i}}_3$$

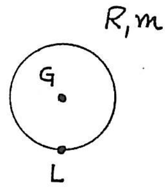
quindi:

$$\boxed{\underline{K}_P = I' \, \frac{\frac{1}{2} k (R+r) - \sqrt{2}\, Mg}{(R+r)\left(M + I/r^2\right)}\, \underline{i}'_3}$$

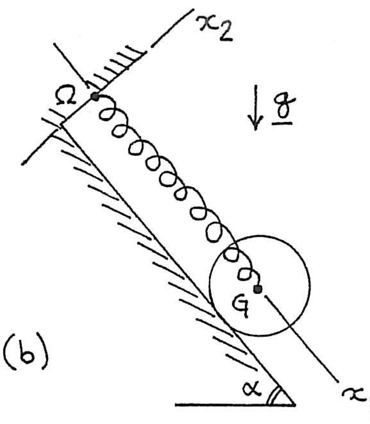
[Oss. Poiché l'asta ha peso trascurabile, la forza che essa esercita sul disco piccolo è perpendicolare alla velocità di G. Dunque la sua potenza è nulla.]

(5) Detto I_3 il momento d'inerzia del disco rispetto all'asse per il centro e parallelo ad Oy_1, si ha: $I_2 = I_3$ (per simmetria). Ma: $I_1 = I_3 + Mr^2$ (per il Teorema di Huygens); allora:

$$\boxed{I_1 = I_2 + Mr^2}$$



(a)



(b)

Sia $\mathcal{C}$ il disco omogeneo di massa m e raggio R rappresentato in (a).

(a) Calcolare il momento di inerzia I_L di $\mathcal{C}$ rispetto alla retta per L perpendicolare al piano contenente $\mathcal{C}$.

(b) Il disco $\mathcal{C}$ (pesante) rotola senza strisciare su una guida inclinata di un angolo (fisso) α (figura (b)). Il centro di massa G del disco è collegato ad un punto fisso Ω da una molla ideale (la retta $G\Omega$ è parallela alla guida). Sul disco agisce inoltre un sistema di forze "frenanti" equivalente al vettore $-\lambda \underline{v}_G$ applicato in G ($\underline{v}_G$ velocità di G, $\lambda > 0$).

(b.1) Determinare l'equazione (differenziale) del moto di $\mathcal{C}$.

(b.2) Verificare che, durante il moto, l'energia meccanica di $\mathcal{C}$ non aumenta.

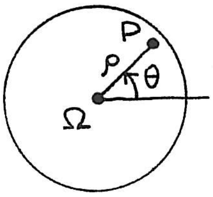
(b.3) Nel caso in cui $\left(\frac{\lambda}{m}\right)^2 < 6\,\frac{k}{m}$, si determini il moto corrispondente alle condizioni iniziali

$$x_1(0) = \frac{mg}{k}\,\mathrm{sen}\,\alpha$$
$$\dot{x}_1(0) = V_0$$

essendo $x_1(t)$ la coordinata di G lungo la guida, e V_0 una costante assegnata.

(a) Detto I_G il momento d'inerzia di $\mathcal{C}$ rispetto alla retta per G perpendicolare al piano contenente $\mathcal{C}$, si ha:

$$I_G = \int_{\mathcal{C}} \mu \, d^2(P,G) \, d\mathcal{C} =$$



$$= \int_0^{2\pi} \left[\int_0^R \frac{m}{\pi R^2} \rho^2 \rho \, d\rho \right] d\theta = \frac{1}{2} m R^2 .$$

coordinate polari:

$d\mathcal{C} = \rho \, d\rho \, d\theta$

Per il Teorema di Huygens:

$$\boxed{I_L = I_G + mR^2 = \frac{3}{2} m R^2}$$

(b.1) Siano $\underline{i}_1, \underline{i}_2, \underline{i}_3$ i versori della terna $\Omega; x_1, x_2, x_3$, e P il punto di contatto di $\mathcal{C}$ con la guida, allo istante t. La 2ª equazione della dinamica, con polo P, è:

$$(1) \qquad \dot{\underline{K}}_P = \underline{\mathcal{M}}_P^{(a)} + \underline{\Psi}_P$$

dove

$$\underline{\mathcal{M}}_P^{(a)} = (G-P) \wedge \left[m\underline{g} + k(\Omega - G) - \lambda \underline{v}_G \right]$$

e

$\underline{\Psi}_P = \underline{0}$ perchè il contatto disco-guida è puntuale.

Infine, poichè la retta per P parallela all'asse Ωx_3 è principale d'inerzia per $\mathcal{C}$, si ha (detto $\underline{\omega}$ il vettore velocità angolare di $\mathcal{C}$, ed I_P ...):

$$\underline{K}_P = I_P \underline{\omega} \quad ; \quad \underline{\omega} = \omega \, \underline{i}_3 \quad (\mathcal{C} \text{ si muove di moto piano})$$

Per il rotolamento puro si ha: $\underline{v}_P = \underline{0}$. Allora

$$\underline{0} = \underline{v}_G + \underline{\omega} \wedge (P-G)$$

Essendo $\underline{v}_G = \dot{x}_1 \underline{i}_1$, $P-G = -R\underline{i}_2$ si ha

$$\dot{x}_1 - \omega R = 0 \quad \Rightarrow \quad \omega = \dot{x}_1/R$$

Ne segue: $\dot{\underline{K}}_P = -I_P \frac{\ddot{x}_1}{R} \underline{i}_3$. Inoltre si ha

$$\underline{m}_P^{(a)} = \left(-mgR \operatorname{sen}\alpha + kRx_1 + \lambda R \dot{x}_1\right) \underline{i}_3 .$$

Proiettando la (1) lungo l'asse Ωx_3 si ottiene la equazione del moto richiesta:

$$\ddot{x}_1 + \frac{\lambda R^2}{I_P} \dot{x}_1 + \frac{kR^2}{I_P} x_1 = \frac{mgR^2}{I_P} \operatorname{sen}\alpha$$

Inserendo il valore di I_P calcolato in (a):

$$\boxed{\ddot{x}_1 + \frac{2\lambda}{3m} \dot{x}_1 + \frac{2k}{3m} x_1 = \frac{2g}{3} \operatorname{sen}\alpha}$$

(b.2) Si ha: $T = \frac{1}{2} I_P \omega^2 = \frac{3}{4} m \dot{x}_1^2$

e: $V = -mg\, x_1 \operatorname{sen}\alpha + \frac{1}{2} k x_1^2$

Si ha allora

$$(T+V)^{\cdot} = \frac{3}{2} m \dot{x}_1 \left[\ddot{x}_1 - \frac{2}{3} g \operatorname{sen}\alpha + \frac{2k}{3m} x_1 \right]$$

Durante il moto $x_1(t)$ verifica l'equazione trovata in (b.1), quindi:

$$\boxed{(T+V)^{\cdot} = -\lambda(\dot{x}_1)^2 \leq 0}$$

(b.3) Posto

$$\frac{2\lambda}{3m} = 2\varepsilon \quad , \quad \frac{2k}{3m} = \omega_0^2$$

l'equazione del moto diventa

$$(2) \qquad \ddot{x}_1 + 2\varepsilon\dot{x}_1 + \omega_0^2 x_1 = \frac{2}{3} g \operatorname{sen}\alpha$$

da studiare con le condizioni iniziali $x_1(0) = \frac{mg}{k} \operatorname{sen}\alpha$ e $\dot{x}_1(0) = V_0$.

Il polinomio caratteristico dell'equazione omogenea associata è: $Z^2 + 2\varepsilon Z + \omega_0^2$, le cui radici sono:

$$Z = -\varepsilon + \sqrt{\varepsilon^2 - \omega_0^2} \quad , \quad Z = -\varepsilon - \sqrt{\varepsilon^2 - \omega_0^2}$$

Ma $\varepsilon^2 - \omega_0^2 = \frac{1}{9}\left[\left(\frac{\lambda}{m}\right)^2 - 6\frac{k}{m}\right] < 0$ per le condizioni assegnate; la soluzione generale dell'equazione omogenea è allora

$$x_0(t) = A e^{-\varepsilon t} \operatorname{sen}(\omega t + B)$$

con $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \varepsilon^2}$. Una soluzione particolare della (2) è

$$x_p(t) = \frac{mg}{k} \operatorname{sen}\alpha .$$

Imponendo le condizioni iniziali si ottiene il sistema

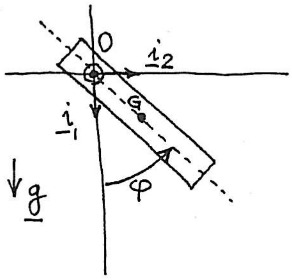
$$\begin{cases} A \operatorname{sen} B = 0 \\ -\varepsilon A \operatorname{sen} B + \omega A \cos B = V_0 \end{cases}$$

nel quale, scegliendo $B = 0$ è $A = \frac{V_0}{\omega}$. Il moto è quindi:

$$\boxed{x_1(t) = \frac{mg}{k} \operatorname{sen} \alpha + \frac{V_0}{\omega} e^{-\varepsilon t} \operatorname{sen} \omega t}$$

e risulta un'oscillazione smorzata intorno alla configurazione (di equilibrio) individuata dalla soluzione particolare x_p.

Dipartimento di Matematica Applicata
« Ulisse Dini »



Una lamina omogenea pesante di massa m è vincolata da una cerniera cilindrica fissa ad asse orizzontale, come in figura. Il lato maggiore della lamina misura a, quello minore b, e la distanza tra O ed il centro di massa G è $a/3$.

(a) Dalla seconda equazione cardinale della dinamica si ricavi l'equazione (differenziale) del moto della lamina.

(b) All'istante $t=0$ sia $\varphi(0) = \pi/2$ e $\dot{\varphi}(0) = 0$. Calcolare in tale istante l'accelerazione $\underline{a}(G)$ del centro di massa della lamina.

(c) Calcolare, per il moto individuato dalle condizioni iniziali specificate in (b), la reazione vincolare che la cerniera esercita sulla lamina negli istanti in cui $\varphi(t) = 0$.

(d) Calcolare il momento di inerzia I_O della lamina rispetto all'asse della cerniera.

Via Bonanno Pisano, 25B - Tel. + 39 50 500065 - Fax + 39 50 49344 - Via Diotisalvi, 2 - Tel. + 39 50 554096 - 56126 Pisa (Italy)

(a) Le forze agenti sulla lamina sono il peso $m\underline{g}$ applicato nel centro di massa G, ed il sistema delle reazioni vincolari esercitate dalla cerniera, equivalente alla risultante $\underline{\Phi}_0$ applicata in O e ad una coppia di momento $\underline{\Psi}_0$. Poiché la cerniera è liscia

$$(1) \qquad \underline{\Psi}_0 \cdot \underline{1}'_3 = 0 ;$$

inoltre il sistema è piano, quindi $\underline{\Psi}_0 = \underline{0}$ e $\underline{\Phi}_0 \cdot \underline{1}'_3 = 0$. La seconda equazione cardinale della dinamica, con polo O, si scrive

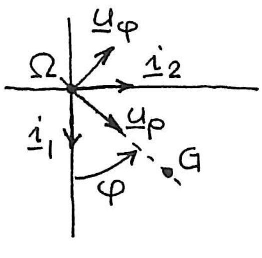
$$(2) \qquad \dot{\underline{K}}_0 = (G-O) \wedge m\underline{g} + \underline{\Psi}_0$$

Siccome l'asse della cerniera (retta $O\underline{i}_3$) è principale d'inerzia per la lamina, ed è $\underline{\omega} = \dot{\varphi}\,\underline{1}_3$, si ha $\underline{K}_0 = I_0 \underline{\omega} = I_0 \dot{\varphi}\,\underline{1}_3$. Quest'ultima relazione, e la (1) consentono di scrivere, proiettando la (2) lungo l'asse $O\underline{1}'_3$:

$$(3) \qquad \boxed{\ddot{\varphi} + \frac{mga}{3I_0} \operatorname{sen}\varphi = 0}$$

che è l'equazione del moto richiesta.

(b)



Il centro di massa G della lamina si muove di moto piano. Possiamo allora descrivere il moto usando le coordinate polari indicate a fianco.

Si ha:

$$(4) \qquad G-\Omega = \frac{a}{3}\underline{u}_\rho \;, \quad \underline{v}(G) = \frac{a}{3}\dot\varphi\, \underline{u}_\varphi$$

$$\underline{a}(G) = \frac{a}{3}\ddot\varphi\, \underline{u}_\varphi - \frac{a}{3}\dot\varphi^2\, \underline{u}_\rho$$

Per la (3), all'istante $t=0$ è $\ddot\varphi = -\dfrac{mga}{3I_0}$. Inoltre: $\underline{u}_\rho = \underline{i}_2$ e $\underline{u}_\varphi = -\underline{i}_1$ dunque l'accelerazione richiesta vale

$$\boxed{\underline{a}(G) = \frac{mga^2}{9\,I_0}\,\underline{i}_1}$$

(c) Per calcolare la reazione, occorre rifarsi alla prima equazione cardinale che si scrive:

$$m\,\underline{a}(G) = m\underline{g} + \underline{\Phi}_0$$

Per la (4) si ha inoltre

$$(5) \qquad \underline{\Phi}_0 = m\left(\frac{a}{3}\ddot\varphi\,\underline{u}_\varphi - \frac{a}{3}\dot\varphi^2\underline{u}_\rho - \underline{g}\right).$$

Occorre calcolare, negli istanti richiesti, il valore di $\underline{u}_\varphi, \underline{u}_\rho, \ddot\varphi$ e $\dot\varphi^2$. Si ha subito dalla (3): $\ddot\varphi = 0$; inoltre è ovviamente $\underline{u}_\varphi = \underline{i}_2$, $\underline{u}_\rho = \underline{i}_1$. Per calcolare $\dot\varphi^2$, osserviamo che, durante il moto, l'energia meccanica è costante (le forze attive sono conservative ed i vincoli lisci e fissi):

$$E(t) = T(t) + V(t) = \frac{1}{2}I_0\dot\varphi^2 - mg\frac{a}{3}\cos\varphi$$

e, dalle condizioni iniziali: $E(0) = 0$. Allora è possibile ricavare $\dot{\varphi}^2$ come funzione di φ:

$$\dot{\varphi}^2 = \frac{2\,mga}{3I_0}\cos\varphi$$

da cui il valore cercato: $\dot{\varphi}^2 = \dfrac{2\,mga}{3I_0}$.

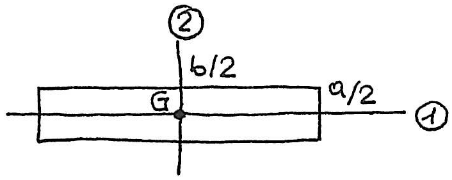
Sostituendo nella (5) si ottiene

$$\boxed{\underline{\Phi}_0 = -m\left(\frac{2mga^2}{9I_0} + g\right)\underline{1}'_1}$$

[Oss. Come si vede, la reazione "dinamica" appena calcolata, è più grande di quella "statica": $\underline{\Phi}_0 = -m\underline{g}$]

(d) Detto C il momento d'inerzia della lamina rispetto all'asse per G parallelo a quello della cerniera, è (Teorema di Huygens):

(6) $$I_0 = C + m\frac{a^2}{9}$$



Con le notazioni usuali, si ha

$$C = A + B$$

Inoltre, dalla definizione di momento d'inerzia:

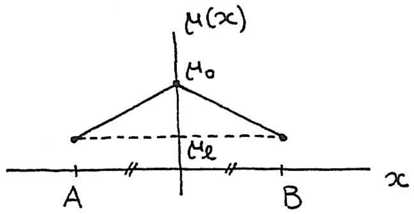
$$A = \int_{-b/2}^{b/2}\left[\int_{-a/2}^{a/2}\frac{m}{ab}\,x_2^2\,dx_1\right]dx_2 = \frac{mb^2}{12}$$

Analogamente: $B = \frac{ma^2}{12}$. Allora, sostituendo nella (6):

$$\boxed{I_0 = \frac{m}{12}\left(\frac{7}{3}a^2 + b^2\right)}$$

Dipartimento di Matematica Applicata
« Ulisse Dini »

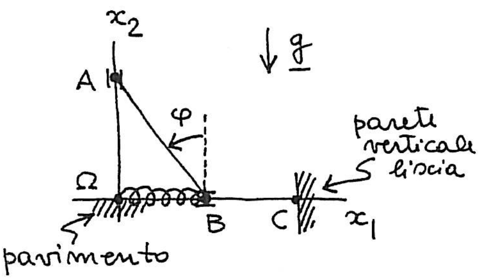
La densità materiale di un'asta AB non omogenea, di lunghezza 2ℓ, è assegnata dalla legge:



$$\mu(x) = \mu_0 + (\mu_\ell - \mu_0)\,\frac{|x|}{\ell}$$

con $\mu_0 > \mu_\ell > 0$.

(a) Determinare la massa totale m, la posizione del centro di massa G ed il momento d'inerzia dell'asta rispetto ad una retta passante per il suo centro e ad essa perpendicolare.



L'asta, pesante, ha gli estremi vincolati a scorrere su due guide lisce, come nella figura a fianco. L'estremo A non può scendere al disotto del punto Ω, quello B non può andare a destra del punto C, distante ℓ da Ω. La molla che collega B ad Ω ha costante elastica k e lunghezza a riposo nulla.

(b) Dire per quali valori di k la posizione dell'asta con $B \equiv C$ è di equilibrio.

(c) Detto φ l'angolo indicato in figura, calcolare l'energia potenziale $V(\varphi)$ dell'asta.(*)

(d) Dire se vi sono valori di k per i quali la posizione $\varphi = 0$ è di equilibrio stabile.

(*) Cioè: delle forze attive agenti sull'asta.

Via Bonanno Pisano, 25B - Tel. + 39 50 500065 - Fax + 39 50 49344 - Via Diotisalvi, 2 - Tel. + 39 50 554096 - 56126 Pisa (Italy)

(a) Per la simmetria materiale dell'asta si ha:

$$\boxed{m = 2\int_0^\ell \left[\mu_0 + (\mu_\ell - \mu_0)\frac{x}{\ell}\right] dx = (\mu_0 + \mu_\ell)\,\ell}$$

il centro di massa dell'asta è nel suo centro geometrico e, detto I il momento d'inerzia richiesto, è:

$$\boxed{I = 2\int_0^\ell \mu(x)\,x^2\,dx = \left(\frac{\mu_\ell}{2} + \frac{\mu_0}{6}\right)\ell^3}$$

(b) Nella configurazione con $B \equiv C$ le forze agenti sull'asta sono: il peso $m\underline{g}$, la forza elastica $\underline{F}_{el}$, la reazione delle guide $\underline{\varphi}_A$ e $\underline{\varphi}_B$ e la reazione della parete verticale $\underline{\varphi}_C$. Si ha:

$$m\underline{g} = -mg\,\underline{i}'_2 \;;\quad \underline{F}_{el} = -k(B-\Omega) = -k x_1\,\underline{i}'_1$$

inoltre, poiché i vincoli sono lisci ed il sistema è piano:

(1a) $$\underline{\varphi}_A = \varphi_A\,\underline{i}'_1$$

(1b) $$\underline{\varphi}_B = \varphi_B\,\underline{i}'_2$$

(1c) $$\underline{\varphi}_C = \varphi_C\,\underline{i}'_1\,,\quad \varphi_C \leq 0$$

le equazioni cardinali della statica per l'asta si scrivono allora:

(2) $$\underline{R} = m\underline{g} + \underline{F}_{el} + \underline{\varphi}_A + \underline{\varphi}_B + \underline{\varphi}_C = \underline{0}$$

(3) $$\underline{M}_C = (G-C)\wedge m\underline{g} + (A-C)\wedge \underline{\varphi}_A = \underline{0}$$

Proiettando la (2) lungo gli assi $\Omega \underline{i}'_1$ ed $\Omega \underline{i}'_2$ e la (3) lungo l'asse $\Omega \underline{i}'_3$, tenendo conto delle (1) si ha:

$$\begin{cases} -k\ell + \varphi_A + \varphi_C = 0 \\ -mg + \varphi_B = 0 \\ mg\dfrac{\ell}{2} - \sqrt{3}\,\ell\,\varphi_A = 0 \end{cases}$$

da cui

$$\varphi_B = mg$$

$$\varphi_A = \frac{mg}{2\sqrt{3}}$$

$$\varphi_C = k\ell - \frac{mg}{2\sqrt{3}}$$

La soluzione è accettabile (e quindi la configurazione è di equilibrio) solo se verifica la (1c), cioè:

$$\boxed{k \leq \frac{mg}{2\sqrt{3}\,\ell}}$$

(c) Poichè

$$G-\Omega = \ell\,(\operatorname{sen}\varphi\,\underline{i}'_1 + \cos\varphi\,\underline{i}'_2)$$

$$B-\Omega = 2\ell\operatorname{sen}\varphi\,\underline{i}'_1$$

si ha:

$$d\mathcal{L}^{(a)} = m\underline{g}\cdot dG + \underline{F}_{el}\cdot dB =$$

$$= (mg\ell\operatorname{sen}\varphi - 4k\ell^2\operatorname{sen}\varphi\cos\varphi)\,d\varphi$$

da cui:

$$\boxed{V(\varphi) = mgl\cos\varphi + 2kl^2 \operatorname{sen}^2\varphi}$$

(d) la posizione individuata da $\varphi = 0$ è di equilibrio per ogni k, infatti:

$$V'(\varphi) = \left(-mgl + 4kl^2\cos\varphi\right)\operatorname{sen}\varphi$$

e $V'(0) = 0$. Derivando ancora si ha:

$$V''(\varphi) = -mgl\cos\varphi + 4kl^2\cos 2\varphi$$

e

$$V''(0) = -mgl + 4kl^2.$$

Se $k > \frac{mg}{4l}$ la posizione di equilibrio è stabile, poichè in $\varphi = 0$ l'energia potenziale risulta avere un minimo relativo isolato. ($V''(0) > 0$).

Dunque: $\boxed{\text{esistono valori di } k \text{ che verificano la richiesta di stabilità.}}$

Oss. L'analisi della stabilità della configurazione $\varphi = 0$ può essere completata:

se $k < \frac{mg}{4l}$ la posizione di equilibrio è instabile (V ha un massimo relativo isolato in $\varphi = 0$);

se $K = \frac{mg}{4l}$, essendo $V'(\varphi) = mgl \operatorname{sen}\varphi (\cos\varphi - 1)$, è $V'(\varphi) < 0$ per $\varphi > 0$ e $V'(\varphi) > 0$ per $\varphi < 0$, dunque per $\varphi = 0$ l'energia potenziale ha ancora un massimo relativo isolato, e l'equilibrio è instabile.