Capitolo 3

Serie numeriche

Si ricordi che una successione $a_1, a_2, \ldots$ di numeri complessi si dice

- *convergente* se esiste $\alpha \in \mathbb{C}$ tale che $\lim_{k\to\infty} a_k = \alpha$,
- *limitata* se esiste un numero reale $L > 0$ tale che per ogni k si abbia $|a_k| \leqslant L$.

Ad esempio, per ogni intero positivo k siano

$$a_k = \frac{i^k}{k} \qquad , \qquad b_k = i^k \qquad , \qquad c_k = k i^k$$

Allora: la successione $a_1, a_2, \ldots$ è convergente (a 0), la successione $b_1, b_2, \ldots$ è limitata (da 1) ma non è convergente, e la successione $c_1, c_2, \ldots$ non è limitata (esercizio: disegnare gli elementi delle successioni sul piano di Gauss).

Si ricordi inoltre che

- se una successione è convergente, allora è anche limitata;
- per una successione di numeri reali monotona, convergenza e limitatezza sono proprietà equivalenti.

Infine, si ricordi che

- la *somma* della successione $a_1, a_2, \ldots$ e della successione $b_1, b_2, \ldots$ è la successione $a_1 + b_1, a_2 + b_2, \ldots$
- il *prodotto* della successione $a_1, a_2, \ldots$ per il numero $c \in \mathbb{C}$ è la successione $c\,a_1, c\,a_2, \ldots$
- per le proprietà del limite, se $a_1, a_2, \ldots$ ha limite α e $b_1, b_2, \ldots$ ha limite β, allora $a_1 + b_1, a_2 + b_2, \ldots$ ha limite $\alpha + \beta$ e $c\,a_1, c\,a_2, \ldots$ ha limite $c\,\alpha$

Salvo avviso contrario, tutte le successioni considerate in questo Capitolo sono successioni di numeri complessi.

3.1 Definizioni e prime proprietà

Siano $a_1, \ldots, a_n$ numeri complessi. La procedura seguente calcola la somma dei numeri dati:

$s_0 = 0$;
`per` k `da` 1 `a` n `ripeti:` $s_k = s_{k-1} + a_k$.

La procedura genera i numeri $s_1, \ldots, s_n$ che valgono

$$s_1 = a_1 \quad , \quad s_2 = a_1 + a_2 \quad , \quad \ldots \quad , \quad s_n = a_1 + \cdots + a_n$$

e l'ultimo di essi è la somma richiesta.

Sia $a_1, a_2, \dots$ una successione di numeri complessi e si consideri la procedura (versione "ad infinitum" della precedente)

$$\begin{aligned} & s_0 = 0;\ k = 1; \\ & \texttt{ripeti:}\ s_k = s_{k-1} + a_k; \\ & \qquad\qquad k \leftarrow k+1. \end{aligned}$$

Questa procedura genera la *successione* di numeri $s_1, s_2, \dots$ tali che

$$s_1 = a_1 \quad , \quad s_2 = a_1 + a_2 \quad , \quad s_3 = a_1 + a_2 + a_3 \quad , \quad \dots$$

La successione $s_1, s_2, \dots$ si chiama *serie generata dalla successione* $a_1, a_2, \dots$ e $a_1, a_2, \dots$ si chiamano *termini* della serie.

Se la successione $s_1, s_2, \dots$ risulta convergente, il suo limite si chiama *somma (dei termini) della serie.* Infine, l'elemento

$$s_n = \sum_{k\,=\,1}^{n} a_k = a_1 + \cdots + a_n$$

si chiama *somma parziale n-esima* della serie.

> *In questo Capitolo si affronta il problema di decidere se la serie generata da una data successione sia convergente, e si studiano le proprietà dell'operazione che ad una successione che genera una serie convergente associa la somma dei termini della serie.*

3.1 Osservazione (notazioni)

Sia $a_1, a_2, \dots$ una successione. I simboli

$$\sum_{k\,=\,1}^{\infty}{}' a_k \qquad \text{oppure} \qquad a_1 +' a_2 +' a_3 +' \cdots$$

saranno usati per indicare *la serie* $s_1, s_2, \dots$ generata da $a_1, a_2, \dots$

Se la serie è convergente, i simboli

$$\sum_{k\,=\,1}^{\infty} a_k \qquad \text{oppure} \qquad a_1 + a_2 + a_3 + \cdots$$

saranno usati per indicare il limite della successione $s_1, s_2, \dots$ ovvero la somma della serie.

> Si faccia attenzione che la scelta di indicare con simboli diversi gli oggetti (diversi) serie e somma della serie è *inusuale.* La scelta più comune è quella di indicare tanto la serie generata da $a_1, a_2, \dots$ quanto la somma della serie con i medesimi simboli
>
> $$\sum_{k\,=\,1}^{\infty} a_k \qquad \text{oppure} \qquad a_1 + a_2 + a_3 + \cdots$$
>
> lasciando al contesto il compito di chiarire a quale dei due oggetti ci si riferisce.

3.2 Esempio

1) Sia $a_1, a_2, \ldots$ una successione *definitivamente nulla* (cioè per la quale esiste un intero m tale che se $k \geqslant m$ si ha $a_k = 0$), e si consideri la serie $s_1, s_2, \ldots$ generata dalla successione.

   Per $n \geqslant m$ si ha $s_n = s_{m-1}$ (la successione $s_1, s_2, \ldots$ è *definitivamente costante*). Dunque la serie è convergente e la somma della serie è definita e vale

$$\lim_{n\to\infty} s_n = s_{m-1} = a_1 + \cdots + a_{m-1}$$

   ovvero

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = a_1 + \cdots + a_{m-1}$$

   In altri temini

   > *Se una successione ha soltanto un numero finito di termini non nulli, la serie generata è convergente, e la somma della serie coincide con la somma degli elementi non nulli della successione.*

2) Si consideri la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty}{}' k \qquad \text{ovvero} \qquad 1 +' 2 +' 3 +' \cdots$$

   Per ogni intero positivo n si ha

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

   Poichè la successione $s_1, s_2, \ldots$ non è limitata, e quindi neppure convergente, la somma della serie non è definita.

3) Si consideri la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty}{}' (-1)^{k-1} \qquad \text{ovvero} \qquad 1 +' (-1) +' 1 +' (-1) +' \cdots$$

   Per ogni intero positivo n si ha

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} = \begin{cases} 0 & \text{se } n \text{ è pari} \\ 1 & \text{se } n \text{ è dispari} \end{cases}$$

   Anche in questo caso, la successione $s_1, s_2, \ldots$ — pur essendo limitata — non è convergente, e la somma della serie non è definita.

4) Sia $q \in \mathbb{C}$. La serie

$$\sum_{k=1}^{\infty}{}' q^k \qquad \text{ovvero} \qquad q +' q^2 +' q^3 +' \cdots$$

   si chiama *serie geometrica di ragione q*.

Se $q = 1$, per ogni intero positivo n si ha

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} q^k = n$$

Se invece $q \neq 1$, per ogni intero positivo n si ha

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} q^k = q\,\frac{1-q^n}{1-q}$$

Se $|q| < 1$ si ha $\lim q^n = 0$ e quindi la successione $s_1, s_2, \ldots$ è convergente, la somma della serie è definita e vale

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \frac{q}{1-q}$$

ovvero si ha

$$\sum_{k=1}^{\infty} q^k = \frac{q}{1-q}$$

Se invece $|q| \geqslant 1$, vedremo (Esempio 3.4) che la successione $s_1, s_2, \ldots$ non è convergente e quindi la somma della serie non è definita.

5) Sia $b_1, b_2, \ldots$ una successione convergente a $\beta \in \mathbb{C}$. Per ogni intero positivo k sia

$$a_k = b_k - b_{k+1}$$

e si consideri la serie $s_1, s_2, \ldots$ generata dalla successione $a_1, a_2, \ldots$ Per ogni intero positivo n si ha

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = b_1 - b_{n+1}$$

e quindi la successione $s_1, s_2, \ldots$ è convergente e la somma della serie vale

$$\lim_{n\to\infty} s_n = b_1 - \beta$$

ovvero

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = b_1 - \beta \qquad \text{cioè} \qquad \sum_{k=1}^{\infty} (b_k - b_{k+1}) = b_1 - \beta$$

Ad esempio, per $b_k = \frac{k}{k+1}$ si ottiene

$$a_k = -\frac{1}{(k+1)(k+2)}$$

e si ha

$$\sum_{k=1}^{\infty} \Big(-\frac{1}{(k+1)(k+2)} \Big) = -\frac{1}{2}$$

3.3 Osservazione (Criterio di Cauchy e condizione necessaria di convergenza)
Si consideri la serie $s_1, s_2, \ldots$ generata dalla successione $a_1, a_2, \ldots$ La successione $s_1, s_2, \ldots$ è convergente se e solo se è una successione di Cauchy. Si ha allora:

la successione $a_1, a_2, \ldots$ *genera una serie* $s_1, s_2, \ldots$ *convergente se e solo se per ogni* $\epsilon > 0$ *esiste un intero* m *tale che per ogni* $k > m$ *e per ogni intero non negativo* p *si ha*

$$|s_{k+p} - s_{k-1}| = |a_k + \cdots + a_{k+p}| \leqslant \epsilon$$

Di conseguenza si ottiene che: se la successione $a_1, a_2, \ldots$ genera una serie convergente, per ogni $\epsilon > 0$ esiste un intero m tale che se $k > m$ si ha $|a_k| \leqslant \epsilon$. Riformulando:

condizione necessaria perché la successione $a_1, a_2, \ldots$ *generi una serie convergente è che si abbia* $\lim_{k\to\infty} a_k = 0$.

3.4 Esempio

Si consideri la serie geometrica di ragione q, con $|q| \geqslant 1$. Poiché la successione $q, q^2, \ldots$ che genera la serie *non verifica* la condizione necessaria

$$\lim_{k\to\infty} q^k = 0$$

la serie non è convergente.

3.5 Osservazione (linearità)

Siano $a_1, a_2, \ldots$ e $b_1, b_2, \ldots$ due successioni. La loro somma $a_1 + b_1, a_2 + b_2, \ldots$ genera la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty}{}'(a_k + b_k)$$

Siccome per ogni intero positivo n si ha

$$\sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} b_k$$

per le proprietà del limite di una successione, se due delle tre serie

$$\sum_{k=1}^{\infty}{}'(a_k + b_k) \quad , \quad \sum_{k=1}^{\infty}{}' a_k \quad \text{e} \quad \sum_{k=1}^{\infty}{}' b_k$$

sono convergenti, anche la terza lo è e per le somme si ha

$$\sum_{k=1}^{\infty} (a_k + b_k) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k + \sum_{k=1}^{\infty} b_k$$

Analogamente, se $c \in \mathbb{C}$ e $c \neq 0$, la successione prodotto di c per $a_1, a_2, \ldots$ genera la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty}{}'(c\, a_k)$$

Siccome per ogni intero positivo n si ha

$$\sum_{k=1}^{n} (c\, a_k) = c \sum_{k=1}^{n} a_k$$

per le proprietà del limite di una successione, se una delle serie

$$\sum_{k=1}^{\infty}{}' (c\, a_k) \quad \text{e} \quad \sum_{k=1}^{\infty}{}' a_k$$

è convergente, anche l'altra lo è e per le somme si ha

$$\sum_{k=1}^{\infty} (c\, a_k) = c \sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

3.6 Esempio

Si consideri la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty}{}' (3^k + 2^{-k})$$

Per ogni intero positivo n si ha

$$\sum_{k=1}^{n} (3^k + 2^{-k}) = \sum_{k=1}^{n} 3^k + \sum_{k=1}^{n} 2^{-k}$$

Siccome la serie geometrica di ragione 3 non è convergente, e la serie geometrica di ragione $\frac{1}{2}$ è convergente, la serie data *non è* convergente.

Si consideri adesso la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty}{}' \frac{3^k + 2^k}{6^k}$$

Per ogni intero positivo n si ha

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{3^k + 2^k}{6^k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{3^k}$$

Siccome le serie geometriche di ragione $\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{3}$ sono convergenti e si ha

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = 1 \quad \text{e} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{3^k} = \frac{1}{2}$$

allora anche la serie data è convergente e si ha

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3^k + 2^k}{6^k} = 1 + \frac{1}{2}$$

3.7 Esercizio

1) Siano $a_1, a_2, \ldots$ una successione, m un intero positivo, $s_1, s_2, \ldots$ la serie generata da $a_1, a_2, \ldots$ e $t_1, t_2, \ldots$ la serie generata dalla successione $a_{m+1}, a_{m+2}, \ldots$

   Verificare che per $n > m$ si ha $s_n = (a_1 + \cdots + a_m) + t_{n-m}$ e dedurne che

   > *la serie generata da $a_1, a_2, \ldots$ è convergente se e solo se lo è la serie generata da $a_{m+1}, a_{m+2}, \ldots$*

e che in tal caso (con ovvio significato dei simboli) si ha

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = (a_1 + \cdots + a_m) + \sum_{k=m+1}^{\infty} a_k \quad \text{e quindi} \qquad \lim_{m\to\infty} \sum_{k=m+1}^{\infty} a_k = 0$$

2) Per ogni intero positivo k, siano $a_k = 1$ e $b_k = -1$. Provare che sia la serie generata da $a_1, a_2, \ldots$ che quella generata da $b_1, b_2, \ldots$ sono non convergenti ma che la serie generata dalla somma $a_1 + b_1, a_2 + b_2, \ldots$ è convergente.

3) Dimostrare che

La serie generata dalla successione $z_1, z_2, \ldots$ è convergente se e solo se lo sono sia la serie generata da $Re(z_1), Re(z_2), \ldots$ che quella generata da $Im(z_1), Im(z_2), \ldots$
In tal caso si ha

$$z_1 + z_2 + \cdots = (Re(z_1) + Re(z_2) + \cdots) + i\,(Im(z_1) + Im(z_2) + \cdots)$$

(Suggerimento: si ricordi che una successione $a_1, a_2, \ldots$ è convergente se e solo se lo sono entrambe le successioni $Re(a_1), Re(a_2), \ldots$ e $Im(a_1), Im(a_2), \ldots$ e si consideri la successione delle somme parziali della serie $z_1 +' z_2 +' \cdots$)

4) Provare che se $a_1, a_2, \ldots$ e $b_1, b_2, \ldots$ sono due successioni tali che $a_k \neq b_k$ solo per un numero *finito* di valori di k, allora la serie generata da $a_1, a_2, \ldots$ è convergente se e solo se lo è la serie generata da $b_1, b_2, \ldots$

5) Verificare che la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty}{}' e^{\frac{1}{k}}$$

non converge.

(Suggerimento: studiare la successione che genera la serie.)

6) Siano $a_1, a_2, \ldots$ una successione *non definitivamente nulla* (cioè tale che per ogni intero n esiste $m > n$ tale che $a_m \neq 0$), e $b_1, b_2, \ldots$ la successione ottenuta da $a_1, a_2, \ldots$ eliminandone gli elementi nulli. Dimostrare che la serie generate da $a_1, a_2, \ldots$ e quella generata da $b_1, b_2, \ldots$ sono entrambe convergenti (nel qual caso hanno la stessa somma) o entrambe non convergenti.

(Suggerimento: confrontare le successioni delle somme parziali delle due serie.)

3.8 Osservazione (raggruppamento)

Siano $a_1, \ldots, a_5$ numeri complessi. Si ha

$$a_1 + \cdots + a_5 = a_1 + (a_2 + a_3) + (a_4 + a_5) = (a_1 + a_2 + a_3) + (a_4 + a_5) = \ldots$$

ovvero: “raggruppando comunque addendi (adiacenti), la somma non cambia.”

Siano $a_1, a_2, \ldots$ una successione di numeri complessi, $\ell_1, \ell_2, \ldots$ una successione crescente (strettamente) di interi positivi e $b_1, b_2, \ldots$ la successione così ottenuta:

$$b_1 = a_1 + \cdots + a_{\ell_1} \quad , \quad b_k = a_{\ell_{k-1}+1} + \cdots + a_{\ell_k} \quad \text{per } k > 1$$

Poiché si ha

$$b_1 +' b_2 +' \cdots = (a_1 + \cdots + a_{\ell_1}) +' (a_{\ell_1+1} + \cdots + a_{\ell_2}) +' \cdots$$

la serie generata da $b_1, b_2, \ldots$ si dice ottenuta *raggruppando i termini* della serie generata da $a_1, a_2, \ldots$

Se $s_1, s_2, \ldots$ è la serie generata da $a_1, a_2, \ldots$ si ha

$$b_1 = s_{\ell_1} \quad , \quad b_2 = s_{\ell_2} - s_{\ell_1} \quad , \quad b_3 = s_{\ell_3} - s_{\ell_2} \quad , \quad \ldots$$

Allora la serie generata da $b_1, b_2, \ldots$ è

$$b_1 = s_{\ell_1} \quad , \quad b_1 + b_2 = s_{\ell_2} \quad , \quad b_1 + b_2 + b_3 = s_{\ell_3} \quad , \quad \ldots$$

e cioè è la sottosuccessione di $s_1, s_2, \ldots$ ottenuta considerandone gli elementi di indice $\ell_1, \ell_2, \ldots$

Allora, se la serie generata da $a_1, a_2, \ldots$ è convergente, anche quella generata da $b_1, b_2, \ldots$ lo è, ed hanno la stessa somma.

In altri termini:

> *Raggruppando i termini di una serie convergente si ottiene ancora una serie convergente, e le due serie hanno la stessa somma.*

3.9 Esercizio

1) Per ogni intero positivo k sia $a_k = (-1)^k$.
   a) Provare che la serie $a_1 +' a_2 +' \cdots$ ovvero $(-1) +' 1 +' (-1) +' 1 +' \cdots$ non converge.
   b) Provare che la serie
   $$(-1 + 1) +' (-1 + 1) +' \cdots$$
   — che si ottiene raggruppando opportunamente i termini di $a_1 +' a_2 +' \cdots$ — è convergente, e se ne determini la somma.
   c) Provare che la serie
   $$-1 +' (1 - 1) +' (1 - 1) +' \cdots$$
   — che si ottiene raggruppando opportunamente i termini di $a_1 +' a_2 +' \cdots$ — è convergente, e se ne determini la somma.
2) Decidere se è vero che

   > *Se raggruppando i termini di una serie $a_1 +' a_2 +' \cdots$ si ottiene una serie non convergente, anche la serie $a_1 +' a_2 +' \cdots$ è non convergente.*

3.10 Osservazione (riordinamento)

La procedura che calcola la somma di quattro numeri:

$s_0 = 0$;
`per` k `da` 1 `a` 4 `ripeti:` $s_k = s_{k-1} + a_k$.

genera valori s_1, s_2, s_3 *diversi* se opera sui dati $1, 2, 3, 4$, o $3, 2, 4, 1$ o $2, 4, 1, 3$, o $\ldots$ Invece, il valore di s_4 — la somma dei quattro numeri dati — *è lo stesso in tutti i casi*. In altri termini: "riordinando comunque gli addendi, la somma non cambia."

Sia $a_1, a_2, \ldots$ una successione, e sia Γ un nastro infinito suddiviso in caselle

$$\Gamma = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c} \hline \quad & \quad & \quad & \quad & \quad & \quad & \quad & \quad \\ \hline \end{array} \cdots$$

in ciascuna delle quali sia possibile scrivere uno ed un solo numero complesso. Si ricopino i numeri $a_1, a_2, \ldots$ sul nastro Γ secondo la procedura seguente:

$k = 1$;
`ripeti:` scrivi a_k in una qualsiasi casella "vuota" di Γ;
$k \leftarrow k + 1$.

Leggendo il contenuto del nastro Γ casella per casella a partire da sinistra (saltando quelle vuote), si ottiene una nuova successione di numeri complessi $b_1, b_2, \ldots$

Ad esempio, se alla fine della procedura si è ottenuto

$$\Gamma = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c} \hline \quad & a_7 & a_{223} & a_1 & \quad & \quad & a_{77} & \quad \\ \hline \end{array} \cdots$$

la nuova successione è $a_7, a_{223}, a_1, a_{77}, \ldots$

La serie generata da $b_1, b_2, \ldots$ si dice ottenuta *riordinando i termini* di quella generata da $a_1, a_2, \ldots$ Proseguendo l'esempio si ha infatti

$$b_1 +' b_2 +' b_3 +' \cdots = a_7 +' a_{223} +' a_1 +' \cdots$$

L'asserto:

> *una serie ottenuta riordinando i termini di una serie convergente è convergente, e le due serie hanno la stessa somma*

è purtroppo **falso**. Nella Sezione 3.3 si mostrerà come riordinando opportunamente serie convergenti si possano ottenere serie non convergenti, oppure convergenti ad una diversa somma. Nel seguito di questa Sezione descriviamo l'insieme delle serie per le quali il riordinamento non pregiudica la convergenza né altera la somma.

3.11 Teorema

Sia $a_1 +' a_2 +' \cdots$ una serie. Le seguenti proprietà sono equivalenti:

- tutte le serie ottenute riordinando $a_1 +' a_2 +' \cdots$ sono convergenti
- la serie $|a_1| +' |a_2| +' \cdots$ è convergente

In tal caso tutte le serie ottenute riordinando $a_1 +' a_2 +' \cdots$ hanno la stessa somma.

Dimostrazione (★)

Si veda l'Appendice a questo Capitolo. □

3.12 Definizione (serie assolutamente convergente)

Se la serie $|a_1| +' |a_2| +' \cdots$ è convergente, la serie $a_1 +' a_2 +' \cdots$ si dice *assolutamente convergente.*

Con questa definizione, il teorema precedente si può riformulare nei termini

> *L'insieme delle serie aventi tutti i riordinamenti convergenti è l'insieme delle serie assolutamente convergenti. Tutti i riordinamenti di una serie assolutamente convergente hanno la stessa somma.*

3.13 Esercizio

1) Provare che

Una serie assolutamente convergente è convergente.

2) Sia $a_1 +' a_2 +' \cdots$ una serie assolutamente convergente. Provare che

$$\Big|\sum_{k=1}^{\infty} a_k\Big| \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$$

3) Dimostrare che

La serie generata dalla successione $z_1, z_2, \ldots$ è assolutamente convergente se e solo se lo sono sia la serie generata da $Re(z_1), Re(z_2), \ldots$ che quella generata da $Im(z_1), Im(z_2), \ldots$
In tal caso si ha

$$\sum_{k=1}^{\infty} |z_k| \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} |Re(z_k)| + \sum_{k=1}^{\infty} |Im(z_k)|$$

4) Decidere se le seguenti serie sono assolutamente convergenti:

$$\sum_{k=1}^{\infty}{}' \Big(-\frac{1}{2}\Big)^k \qquad , \qquad \sum_{k=1}^{\infty}{}' \Big(-\frac{1}{(k+1)(k+2)}\Big) \quad \text{(vedere Esempio 3.2)}$$

3.2 Serie a termini non negativi

Una serie $a_1 +' a_2 +' \cdots$ si dice *a termini non negativi* (rispettivamente: *a termini positivi*) se ogni a_k è un numero reale non negativo (rispettivamente: positivo). Si osservi che le somme parziali di una serie a termini non negativi (rispettivemente: positivi) sono non negative (rispettivamente: positive).

In questa Sezione, si studiano serie a termini non negativi. In particolare si affronta il problema di decidere quando una tale serie sia convergente. Si osservi che, in base al Teorema 3.11, per una serie a termini non negativi, convergenza e convergenza assoluta sono proprietà equivalenti. Infine, si osservi che se $a_1, a_2, \ldots$ è una successione di numeri complessi, la serie $|a_1| +' |a_2| +' \cdots$ è a termini non negativi. Quindi i risultati ottenuti si potranno applicare per decidere se la serie $a_1 +' a_2 +' \cdots$ sia assolutamente convergente — e quindi, per l'Esercizio 3.13, convergente.

3.14 Osservazione (convergenza di serie a termini non negativi)

Sia $a_1 +' a_2 +' \cdots$ una serie a termini non negativi. La successione delle somme parziali $s_1, s_2, \ldots$ è una successione non decrescente di numeri reali non negativi. Se è non limitata, la serie non converge. Se è limitata, la successione (e quindi la serie) è convergente.

Dunque:

Una serie a termini non negativi converge se e solo se la successione delle somme parziali è limitata.

Una serie a termini non negativi non convergente è detta **divergente**.

3.15 Osservazione (Criterio di confronto)

Siano $a_1, a_2, \ldots$ e $b_1, b_2, \ldots$ successioni di numeri reali non negativi tali che per ogni k si ha $a_k \leqslant b_k$. Allora per ogni n si ha

$$a_1 + \cdots + a_n \leqslant b_1 + \cdots + b_n$$

Ne segue che se la successione delle somme parziali di $b_1 +' b_2 +' \cdots$ è limitata, anche quella delle somme parziali di $a_1 +' a_2 +' \cdots$ è limitata.

Per l'Osservazione 3.14 si ha quindi:

Se $a_1, a_2, \ldots$ e $b_1, b_2, \ldots$ sono successioni di numeri reali non negativi tali che per ogni k si ha $a_k \leqslant b_k$, allora: se la serie $b_1 +' b_2 +' \cdots$ è convergente anche $a_1 +' a_2 +' \cdots$ lo è; se la serie $a_1 +' a_2 +' \cdots$ è divergente, anche la serie $b_1 +' b_2 +' \cdots$ lo è.

Si osservi che questo criterio consente di stabilire la convergenza di una serie *senza dover calcolare esplicitamente la successione delle somme parziali.*

3.16 Esempio (serie armonica)
La serie a termini positivi

$$\sum_{k=1}^{\infty}{}' \frac{1}{k} \qquad \text{ovvero} \qquad 1 +' \frac{1}{2} +' \frac{1}{3} +' \cdots$$

si chiama *serie armonica*, e risulta **divergente**.
Infatti: posto, per ogni intero positivo k

$$b_k = \int_k^{k+1} \frac{1}{x}\, dx$$

la somma parziale n-esima della serie (a termini positivi) $b_1 +' b_2 +' \cdots$ è

$$b_1 + \cdots + b_n = \int_1^{n+1} \frac{1}{x}\, dx = \log(n+1)$$

Quindi la successione delle somme parziali non è limitata e $b_1 +' b_2 +' \cdots$ è divergente.
Infine, essendo $\frac{1}{k} \geqslant b_k$ (aiutarsi con un disegno), per il criterio di confronto si ha l'asserto.

3.17 Esempio (serie armonica generalizzata)
Sia s un numero reale *positivo.*

1) La serie

$$\sum_{k=1}^{\infty}{}' \frac{1}{k^{1+s}}$$

è **convergente**.

Infatti, posto $b_1 = 1$ e, per $k \geqslant 2$

$$b_k = \int_{k-1}^{k} \frac{1}{x^{1+s}}\, dx$$

per la somma parziale n-esima della serie (a termini positivi) $b_1 +' b_2 +' \cdots$ si ha

$$b_1 + \cdots + b_n = 1 + \int_1^n \frac{1}{x^{1+s}}\, dx = 1 + \frac{1}{s}\left(1 - \frac{1}{n^s}\right)$$

Siccome

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^s} = 0$$

la successione delle somme parziali è limitata, e quindi $b_1 +' b_2 +' \cdots$ è convergente.

Infine, essendo $\frac{1}{k^{1+s}} \leqslant b_k$, per il criterio di confronto si ha l'asserto.

2) La serie

$$\sum_{k=1}^{\infty}{}' \frac{1}{k^{1-s}}$$

è **divergente**.

Infatti, per ogni intero k si ha $\frac{1}{k} \leqslant \frac{1}{k^{1-s}}$. Per il criterio del confronto, e per la divergenza della serie armonica, si ha l'asserto.

3.18 Esercizio

1) Dimostrare che

Se $a_1 +' a_2 +' \cdots$ e $b_1 +' b_2 +' \cdots$ sono serie a termini non negativi convergenti e per ogni k si ha $a_k \leqslant b_k$, allora

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} b_k$$

2) Sia $a_1 +' a_2 +' \cdots$ una serie a termini non negativi *divergente*. Provare che

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k = +\infty$$

3) Dimostrare che la serie a termini positivi

$$\sum_{k=1}^{\infty}{}' \frac{1}{n!}$$

è convergente.

(Suggerimento: provare che per ogni n si ha $\frac{1}{n!} \leqslant 2\,\frac{1}{2^n}$ ed utilizzare il criterio di confronto.)

4) Utilizzare il criterio del confronto per dimostrare il seguente "**criterio di confronto asintotico**:"

Siano $a_1, a_2, \ldots$ e $b_1, b_2, \ldots$ successioni di numeri reali positivi tali che

$$\lim \frac{a_k}{b_k} = 1$$

Allora $a_1 +' a_2 +' \cdots$ è convergente se e solo se lo è $b_1 +' b_2 +' \cdots$

(Suggerimento: dalla definizione di limite segue che esiste un intero n tale che per $k \geqslant n$ si ha $\frac{1}{2} \leqslant \frac{a_k}{b_k} \leqslant \frac{3}{2}$.)

5) Utilizzare il criterio di confronto asintotico e la nota divergenza della serie armonica per mostrare che le serie

$$\sum_{k=1}^{\infty}{}' \operatorname{sen}\frac{1}{n} \qquad \text{e} \qquad \sum_{k=1}^{\infty}{}' \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$$

sono divergenti.

6) Utilizzare il criterio del confronto (e le note proprietà di convergenza della serie geometrica) per dimostrare il seguente "**criterio del rapporto**:"

Siano $a_1, a_2, \ldots$ una successione di numeri reali positivi e c un numero reale tali che

$$\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = c$$

Se $0 \leqslant c < 1$ allora $a_1 +' a_2 +' \cdots$ converge. Se $c > 1$ allora $a_1 +' a_2 +' \cdots$ diverge.

(Suggerimento: dalla definizione di limite segue che per ogni $\epsilon > 0$ esiste un intero N tale che per $n \geqslant N$ si ha $c - \epsilon \leqslant \frac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant c + \epsilon$ e quindi, per ogni intero k si ha $(c-\epsilon)^k a_N \leqslant a_{N+k} \leqslant (c+\epsilon)^k a_N$.)

7) Utilizzare il criterio del rapporto per studiare la convergenza delle serie

$$\sum_{k=1}^{\infty}{}' \frac{n^2}{2^n} \qquad \text{e} \qquad \sum_{k=1}^{\infty}{}' \frac{3^{2n-1}}{n^2+1}$$

8) Utilizzare il criterio del confronto (e le note proprietà di convergenza della serie geometrica) per dimostrare il seguente "**criterio della radice**:"

Siano $a_1, a_2, \ldots$ una successione di numeri reali positivi e c un numero reale tali che

$$\lim \sqrt[n]{a_n} = c$$

Se $0 \leqslant c < 1$ allora $a_1 +' a_2 +' \cdots$ converge. Se $c > 1$ allora $a_1 +' a_2 +' \cdots$ diverge.

(Suggerimento: dalla definizione di limite segue che, se $c > 0$, per ogni $\epsilon > 0$ esiste un intero N tale che per $n \geqslant N$ si ha $c - \epsilon \leqslant \sqrt[n]{a_n} \leqslant c + \epsilon$ e quindi $(c-\epsilon)^n \leqslant a_n \leqslant (c+\epsilon)^n$.)

9) Discutere l'uso del criterio del rapporto e di quello della radice per la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty}{}' \frac{2+(-1)^k}{2^k}$$

10) Sia $a_1, a_2, \ldots$ una successione di numeri reali *non positivi*. Provare che la serie $a_1 +' a_2 +' \cdots$ è convergente se e solo se lo è la serie $(-a_1) +' (-a_2) +' \cdots$

11) Mostrare che:

La somma di due serie assolutamente convergenti e il prodotto di una serie assolutamente convergente per un elemento di $\mathbb{C}$ sono assolutamente convergenti.

12) Siano $a_1, a_2, \ldots$ e $b_1, b_2, \ldots$ successioni di numeri complessi tali che $a_1 +' a_2 +' \cdots$ è assolutamente convergente e $b_1, b_2, \ldots$ è limitata. Provare che $a_1 b_1 +' a_2 b_2 +' \cdots$ è assolutamente convergente.

13) Siano $a_1 +' a_2 +' \cdots$ una serie *assolutamente convergente* e M, N una partizione degli interi positivi (cioè: $M \cup N =$ insieme degli interi positivi e $M \cap N = \emptyset$). Posto

$$\mu_k = \begin{cases} a_k & \text{se } k \in M \\ 0 & \text{se } k \in N \end{cases} \quad , \quad \nu_k = \begin{cases} 0 & \text{se } k \in M \\ a_k & \text{se } k \in N \end{cases}$$

dimostrare che $\mu_1 +' \mu_2 +' \cdots$ e $\nu_1 +' \nu_2 +' \cdots$ sono assolutamente convergenti e che, in tal caso

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k + \sum_{k=1}^{\infty} \nu_k$$

ovvero che, detti $m_1 < m_2 < \cdots$ gli elementi di M e $n_1 < n_2 < \cdots$ quelli di N, le serie $a_{m_1} +' a_{m_2} +' \cdots$ e $a_{n_1} +' a_{n_2} +' \cdots$ sono assolutamente convergenti e si ha

$$a_1 + a_2 + \cdots = (a_{m_1} + a_{m_2} + \cdots) + (a_{n_1} + a_{n_2} + \cdots)$$

(Suggerimento: si osservi che $|a_k| = |\mu_k| + |\nu_k|$ e quindi anche che $|\mu_k| \leqslant |a_k|$ e $|\nu_k| \leqslant |a_k|$; per la parte finale si utilizzi il punto 6) dell'Esercizio 3.7.)

3.3 Serie di prodotti

In questa Sezione si fornisce un criterio utile per studiare la convergenza di serie che risultino non assolutamente convergenti, e si indicano esempi che mostrano come riordinando i termini di una serie convergente, ma non assolutamente convergente, si possano ottenere sia serie convergenti (ma con somma diversa) sia serie non convergenti (rileggere l'Osservazione 3.10).

3.19 Teorema (Criterio di Dirichlet)

Siano $a_1, a_2, \ldots$ una successione di numeri complessi che genera una serie $a_1 +' a_2 +' \cdots$ *limitata*, e $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ una successione decrescente di numeri reali positivi tali che $\lim \lambda_k = 0$.

Allora la successione "prodotto termine a termine" $a_1\lambda_1, a_2\lambda_2, \ldots$ genera una serie $a_1\lambda_1 +' a_2\lambda_2 +' \cdots$ convergente.

In particolare, scegliendo $a_k = (-1)^{k-1}$ si ottiene il "**criterio di Leibniz**:"

> *Se $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ è una successione decrescente di numeri reali positivi tali che $\lim \lambda_k = 0$, allora la serie ("a segni alterni") $\lambda_1 +' (-\lambda_2) +' \lambda_3 +' (-\lambda_4) +' \cdots$ è convergente.*

Dimostrazione (★)

Posto $s_0 = 0$ e

$$s_n = \sum_{j=1}^{n} a_j$$

si ha $a_k = s_k - s_{k-1}$ e quindi, per ogni n:

$$\sum_{k=1}^{n} a_k\lambda_k = \sum_{k=1}^{n} (s_k - s_{k-1})\lambda_k = \sum_{k=1}^{n} s_k\lambda_k - \sum_{k=1}^{n} s_k\lambda_{k+1} + s_n\lambda_{n+1} =$$

$$= s_n\lambda_{n+1} + \sum_{k=1}^{n} s_k(\lambda_k - \lambda_{k+1})$$

Per mostrare la convergenza delle serie $a_1\lambda_1 +' a_2\lambda_2 +' \cdots$ è quindi sufficiente provare che la successione $s_1\lambda_2, s_2\lambda_3, \ldots$ ha limite e che la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty}{}' s_k(\lambda_k - \lambda_{k+1})$$

è convergente.

Siccome la successione $s_1, s_2, \dots$ è limitata e $\lim \lambda_k = 0$, si ha certamente

$$\lim_{n\to\infty} s_n \lambda_{n+1} = 0$$

Inoltre, esiste L reale positivo tale che per ogni k si ha $|s_k| < L$ e quindi, essendo $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ decrescente

$$|s_k(\lambda_k - \lambda_{k+1})| \leqslant L(\lambda_k - \lambda_{k+1})$$

Infine: per il punto 5) dell'Esempio 3.2, la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty}{}' (\lambda_k - \lambda_{k+1})$$

è convergente e di conseguenza, applicando il criterio del confronto, la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty}{}' |s_k(\lambda_k - \lambda_{k+1})|$$

risulta convergente. Quindi la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty}{}' s_k(\lambda_k - \lambda_{k+1})$$

è assolutamente convergente e perciò convergente. □

3.20 Esempio

Utilizzando il criterio di Leibniz si prova che la "serie armonica a segni alterni"

$$\sum_{k=1}^{\infty}{}' \frac{(-1)^{k-1}}{k} \qquad \text{ovvero} \qquad 1 +' (-\tfrac{1}{2}) + \tfrac{1}{3} +' (-\tfrac{1}{4}) + \cdots$$

è convergente (ma non assolutamente convergente — rivedere l'Esempio 3.16).

3.21 Esempio

Sia $a_1, a_2, \dots$ una successione di numeri *reali* che genera una serie convergente ma *non* assolutamente convergente, e siano $\pi_1, \pi_2, \dots$ la sottosuccessione di $a_1, a_2, \dots$ ottenuta considerandone i soli elementi non negativi, e $\nu_1, \nu_2, \dots$ quella ottenuta considerandone i soli elementi negativi (si osservi che gli elementi $a_1, a_2, \dots$ non hanno segno definitivamente costante, altrimenti la serie $a_1 +' a_2 +' \cdots$ sarebbe assolutamente convergente).

Per ogni intero positivo n e per r, s interi positivi opportuni si ha

$$|a_1| + \cdots + |a_n| = (\pi_1 + \cdots + \pi_r) - (\nu_1 + \cdots + \nu_s)$$

e

$$a_1 + \cdots + a_n = (\pi_1 + \cdots + \pi_r) + (\nu_1 + \cdots + \nu_s)$$

Per la prima relazione, siccome la serie $|a_1| +' |a_2| +' \cdots$ è non convergente, *almeno una* delle serie $\pi_1 +' \pi_2 +' \cdots$ e $\nu_1 +' \nu_2 +' \cdots$ è non convergente. Ma, siccome la serie $a_1 +' a_2 +' \cdots$ è convergente, dalla seconda relazione segue che *entrambe* le serie $\pi_1 +' \pi_2 +' \cdots$ e $\nu_1 +' \nu_2 +' \cdots$ sono non convergenti (più precisamente: le serie $\pi_1 +' \pi_2 +' \cdots$ e $(-\nu_1) +' (-\nu_2) +' \cdots$ sono divergenti).

Si osservi, infine, che per la condizione necessaria di convergenza della serie $a_1 +' a_2 +' \cdots$ si ha $\lim a_k = 0$ e quindi $\lim \pi_k = 0$ e $\lim \nu_k = 0$.

Descriviamo adesso un procedimento che, dato un numero reale $L > 0$, genera un riordinamento convergente ad L della serie $a_1 +' a_2 +' \cdots$ I termini della nuova serie $b_1 +' b_2 +' \cdots$ sono ottenuti alternando opportunamente gli elementi delle successioni $\pi_1, \pi_2, \ldots$ e $\nu_1, \nu_2, \ldots$

```
s_0 = 0;
k = 1;  (indice della nuova successione)
p = 1;  (prossimo elemento non negativo da considerare)
n = 1;  (prossimo elemento negativo da considerare)
ripeti:   se s_{k-1} ⩽ L allora b_k = π_p,  p ← p + 1
              altrimenti b_k = ν_n,  n ← n + 1;
          s_k = s_{k-1} + b_k;
          k ← k + 1.
```

Si osservi che

- b_k viene scelto non negativo se $s_{k-1} \leqslant L$ e negativo se $s_{k-1} > L$: in questo modo (si ricordi che le serie $\pi_1 +' \pi_2 +' \cdots$ e $(-\nu_1) +' (-\nu_2) +' \cdots$ sono divergenti) si ottiene una successione $s_1, s_2, \ldots$ che “oscilla” intorno ad L, cioè che non è né definitivamente maggiore o uguale ad L, né definitivamente minore di L;

- per quanto detto al punto precedente, la serie $b_1 +' b_2 +' \cdots$ è un riordinamento di $a_1 +' a_2 +' \cdots$ (infatti tutti i termini della serie $a_1 +' a_2 +' \cdots$ sono termini della nuova serie) e perciò soddisfa la condizione necessaria di convergenza $\lim b_k = 0$;

Inoltre, la successione $s_0, s_1, s_2, \ldots$ risulta

(1) crescente da $s_0 = 0$ fino ad un massimo locale s_{m_1} (maggiore di L per costruzione) che verifica la relazione
$$s_{m_1} \leqslant L + |b_{m_1}|$$

(2) decrescente da s_{m_1} fino ad un minimo locale s_{m_2} (minore di L per costruzione) che verifica la relazione
$$s_{m_2} \geqslant L + |b_{m_2}|$$

$\vdots$

Infine, poiché $\lim b_k = 0$ e per la successione $m_1, m_2, \ldots$ si ha $\lim m_k = \infty$, entrambe le successioni $s_{m_1}, s_{m_3}, \ldots$ (dei massimi) e $s_{m_2}, s_{m_4}, \ldots$ (dei minimi) hanno limite L.

Da questa considerazione segue facilmente che $\lim s_k = L$. Ricordando che $s_1, s_2, \ldots$ è la successione delle somme parziali di $b_1 +' b_2 +' \cdots$ si ottiene
$$b_1 + b_2 + \cdots = L$$

Modificando opportunamente il procedimento si trovano riordinamenti di $a_1 +' a_2 +' \cdots$ convergenti ad $L \leqslant 0$, oppure non limitati, oppure non convergenti.

3.22 Esercizio

1) Sia $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ è una successione decrescente di numeri reali positivi tali che $\lim \lambda_k = 0$. Per il criterio di Leibniz, la serie
$$s_1, s_2, \ldots = \lambda_1 +' (-\lambda_2) +' \lambda_3 +' (-\lambda_4) +' \cdots$$
è convergente. Detta L la somma della serie, provare che
$$s_2 \leqslant s_4 \leqslant \cdots \leqslant L \leqslant \cdots \leqslant s_3 \leqslant s_1$$
(Suggerimento: aiutarsi con un disegno, e osservare che $s_k - s_{k-1} = \lambda_k$.)

2) Sia L la somma della serie armonica a segni alterni. Decidere se

$$\tfrac{1}{2} < L < 1$$

3) Sia θ tale che $e^{i\theta} \neq 1$. Dimostrare che la somma parziale n-esima della serie

$$\sum_{k=1}^{\infty}{}' e^{ik\theta} \qquad \text{ovvero} \qquad e^{i\theta} +' (e^{i\theta})^2 +' (e^{i\theta})^3 +' \cdots$$

è limitata (da $\frac{2}{|1-e^{i\theta}|}$), e utilizzare il risultato ottenuto ed il criterio di Dirichlet per discutere la convergenza delle serie

$$\sum_{k=1}^{\infty}{}' \frac{\cos(k\theta)}{k} \quad \text{e} \quad \sum_{k=1}^{\infty}{}' \frac{\operatorname{sen}(k\theta)}{k}$$

(Suggerimento: discutere la convergenza della serie

$$\sum_{k=1}^{\infty}{}' \frac{e^{ik\theta}}{k}$$

e utilizzare il punto 3) dell'Esercizio 3.7.)

3.4 Problemi test

(T.1) Per ciascuna delle seguenti serie, decidere la convergenza:

$$(a)\ \sum_{k=1}^{\infty}{}' \tfrac{1}{k^2} \quad , \quad (b)\ \sum_{k=1}^{\infty}{}' (-\tfrac{3}{k}) \quad , \quad (c)\ \sum_{k=1}^{\infty}{}' (\tfrac{1}{k^2} - \tfrac{3}{k}) \quad , \quad (d)\ \sum_{k=1}^{\infty}{}' 3i(\tfrac{i}{2})^k$$

(T.2) Per ciascuno dei seguenti asserti, decidere se è vero o falso:

(1) Una successione definitivamente nulla genera una serie convergente.

(2) Se la serie $(a_1 + b_1) +' (a_2 + b_2) +' \cdots$ è convergente, anche le serie $a_1 +' a_2 +' \cdots$ e $b_1 +' b_2 +' \cdots$ lo sono.

(3) Una serie a termini positivi è o convergente o divergente.

(4) Sia $a_1, a_2, \ldots$ una successione che genera una serie non convergente. Allora ogni successione ottenuta eliminando da $a_1, a_2, \ldots$ un numero finito di elementi genera una serie non convergente.

(T.3) Sia $a_1, a_2, \ldots$ una successione di numeri complessi. Per ciascuna delle seguenti condizioni, discutere la convergenza della serie $a_1 +' a_2 +' \cdots$:

$$(a)\ |a_k| > \frac{1}{k} \quad , \quad (b)\ \lim \frac{|a_k|}{k} = 1 \quad , \quad (c)\ |a_k| \leqslant \frac{k}{1+k^3}$$

(Si osservi che la condizione (a) è verificata dalla successione $a_k = \frac{(-2)^k}{k}$.)

(T.4) Per ciascuna delle seguenti serie, decidere la convergenza:

$$(a)\ \sum_{k=1}^{\infty}{}' (\tfrac{1}{2^k} + \tfrac{i}{k}) \qquad , \qquad (b)\ \sum_{k=1}^{\infty}{}' i^k$$

(T.5) Per ciascuno dei seguenti asserti, decidere se è vero o falso:

(1) Sia $z_1, z_2, \dots$ una successione di numeri complessi. Se la serie $z_1 +' z_2 +' \cdots$ è convergente, anche la serie $\bar{z}_1 +' \bar{z}_2 +' \cdots$ lo è.

(2) Sia $a_1, a_2, \dots$ una successione di numeri reali positivi. Se la serie $a_1 +' a_2 +' \cdots$ è convergente, anche la serie $\sqrt{a_1} +' \sqrt{a_2} +' \cdots$ lo è.

3.5 Esercizi

(E.1) Discutere la convergenza delle seguenti serie

$$\sum_{k=1}^{\infty}{}' \operatorname{sen}(\tfrac{\pi}{4}k) \qquad \sum_{k=1}^{\infty}{}' \tfrac{1}{k(k+1)} \qquad \sum_{k=1}^{\infty}{}' \tfrac{k}{k^2+1}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}{}' \tfrac{k}{2^{k-1}} \qquad \sum_{k=1}^{\infty}{}' \tfrac{3^{2k-1}}{k+1} \qquad \sum_{k=1}^{\infty}{}' (-1)^k \tfrac{k \log k}{e^k}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}{}' (-1)^k \tfrac{k}{k+2} \qquad \sum_{k=1}^{\infty}{}' \tfrac{\cos(k\alpha)}{k^2} \qquad \sum_{k=1}^{\infty}{}' \tfrac{1}{\sqrt{k^3}}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}{}' (-1)^k \tfrac{2^k+3^k i}{4^k} \qquad \sum_{k=1}^{\infty}{}' \tfrac{1}{\log(k+1)} \qquad \sum_{k=1}^{\infty}{}' \tfrac{\log(k+1)}{k}$$

(E.2) Discutere la convergenza della serie

$$\sum_{k=1}^{\infty}{}' \frac{i^k}{k}$$

(E.3) Per ogni k sia $a_k \in \{0, \dots, 9\}$. Dimostrare che la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty}{}' a_k 10^{-k}$$

è convergente, e descriverne la somma.

(E.4) Siano $a_k = (-1)^k \frac{2}{\sqrt{k^3}}$ e s_k la successione generata dalla legge

$$s_k = \begin{cases} 0 & \text{per } k = 1 \\ s_{k-1} + a_k & \text{per } k > 1 \end{cases}$$

Decidere se la successione s_k è limitata e se esiste $\lim s_k$.

(E.5) Determinare gli $\alpha \in \mathbb{R}$ tali che

$$\sum_{k=1}^{\infty}{}' \alpha^k \text{ è convergente e } \sum_{k=1}^{\infty} \alpha^k = 7$$

(E.6) Sia $z \in \mathbb{C}$. Discutere la convergenza delle serie

$$\sum_{k=1}^{\infty}{}' \frac{z^k}{k} \qquad \text{e} \qquad \sum_{k=1}^{\infty}{}' \frac{z^k}{k!}$$

(E.7) Decidere la convergenza della serie

$$\sum_{k=1}^{\infty}{}' e^{\frac{1}{k^2}}$$

e discutere l'asserto: "se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è continua e $a_1 +' a_2 +' \cdots$ è una serie a termini reali convergente, allora la serie $f(a_1) +' f(a_2) +' \cdots$ è convergente."

3.6 Appendice

Si riporta in questa Sezione la dimostrazione del Teorema 3.11.

3.23 Lemma (riordinamento di serie a termini non negativi)
Sia $a_1 +' a_2 +' \cdots$ una serie a termini non negativi convergente. Allora ogni riordinamento di $a_1 +' a_2 +' \cdots$ è convergente.
In altre parole

Se una serie a termini non negativi è convergente, è anche assolutamente convergente.

In tal caso, tutti i riordinamenti di $a_1 +' a_2 +' \cdots$ hanno somma $a_1 + a_2 + \cdots$

Dimostrazione
Sia $b_1 +' b_2 +' \cdots = t_1, t_2, \ldots$ un riordinamento di $a_1 +' a_2 +' \cdots = s_1, s_2, \ldots$. Si ha (verificare!)

per ogni intero positivo k esiste un intero positivo m tale che $t_k \leqslant s_m$

Poiché $a_1 +' a_2 +' \cdots$ è convergente, $s_1, s_2, \ldots$ è limitata. Quindi anche $t_1, t_2, \ldots$ è limitata e perciò $b_1 +' b_2 +' \cdots$ è convergente.
Infine, posto $R = b_1 + b_2 + \cdots$, si ha

$$R = \sup\{t_k\} \leqslant \sup\{s_k\} = S$$

Ripetendo il ragionamento considerando $a_1 +' a_2 +' \cdots$ un riordinamento di $b_1 +' b_2 +' \cdots$ si ottiene che $S \leqslant R$ e quindi $R = S$. □

3.24 Lemma (caratterizzazione di serie a termini reali assolutamente convergenti)
Sia $a_1 +' a_2 +' \cdots$ una serie a termini reali e siano

$$a_k^{(+)} = \begin{cases} a_k & \text{se } a_k \geqslant 0 \\ 0 & \text{se } a_k < 0 \end{cases} \quad , \quad a_k^{(-)} = \begin{cases} 0 & \text{se } a_k > 0 \\ -a_k & \text{se } a_k \leqslant 0 \end{cases}$$

Allora:

- Se *entrambe* le serie (a termini non negativi) $a_1^{(+)} +' a_2^{(+)} +' \cdots$ e $a_1^{(-)} +' a_2^{(-)} +' \cdots$ sono *convergenti*, allora la serie $a_1 +' a_2 +' \cdots$ è *assolutamente convergente.*

- Se *solo una* delle serie $a_1^{(+)} +' a_2^{(+)} +' \cdots$ e $a_1^{(-)} +' a_2^{(-)} +' \cdots$ è *convergente*, allora la serie $a_1 +' a_2 +' \cdots$ *non è convergente.*

- Se *entrambe* le serie $a_1^{(+)} +' a_2^{(+)} +' \cdots$ e $a_1^{(-)} +' a_2^{(-)} +' \cdots$ sono *non convergenti*, allora la serie $a_1 +' a_2 +' \cdots$ *non è assolutamente convergente.*

In particolare

La serie $a_1 +' a_2 +' \cdots$ è assolutamente convergente se e solo se entrambe le serie $a_1^{(+)} +' a_2^{(+)} +' \cdots$ e $a_1^{(-)} +' a_2^{(-)} +' \cdots$ sono convergenti.

Dimostrazione

Si osservi che, per definizione, si ha $a_k = a_k^{(+)} - a_k^{(-)}$ e quindi per ogni intero positivo n:

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} a_k^{(+)} - \sum_{k=1}^{n} a_k^{(-)}$$

Allora:

- Se entrambe le serie $a_1^{(+)} +' a_2^{(+)} +' \cdots$ e $a_1^{(-)} +' a_2^{(-)} +' \cdots$ sono convergenti, per il Lemma 3.23 sono assolutamente convergenti, e quindi anche $a_1 +' a_2 +' \cdots$ è assolutamente convergente.

- Se (ad esempio) solo $a_1^{(+)} +' a_2^{(+)} +' \cdots$ è convergente, la serie $a_1 +' a_2 +' \cdots$ non può essere convergente altrimenti (per la proprietà di linearità) sarebbe convergente anche $a_1^{(-)} +' a_2^{(-)} +' \cdots$

- L'ultimo asserto, dovuto a Riemann, si dimostra utilizzando l'idea esposta nell'Esempio 3.21. □

3.25 Lemma (invarianza della somma)

Sia $a_1 +' a_2 +' \cdots$ una serie a termini reali *assolutamente convergente*. Tutte le serie ottenute riordinando $a_1 +' a_2 +' \cdots$ hanno somma $a_1 + a_2 + \cdots$.

Dimostrazione

Siccome $a_1 +' a_2 +' \cdots$ è assolutamente convergente, per il Lemma 3.24, e con le stesse notazioni, le serie $a_1^{(+)} +' a_2^{(+)} +' \cdots$ e $a_1^{(-)} +' a_2^{(-)} +' \cdots$ sono convergenti e dunque, per il Lemma 3.23, assolutamente convergenti. Inoltre, essendo $a_k = a_k^{(+)} - a_k^{(-)}$, per la proprietà di linearità si ha

$$a_1 + a_2 + \cdots = (a_1^{(+)} + a_2^{(+)} + \cdots) - (a_1^{(-)} + a_2^{(-)} + \cdots)$$

Se $b_1 +' b_2 +' \cdots$ è un riordinamento di $a_1 +' a_2 +' \cdots$, $b_1^{(+)} +' b_2^{(+)} +' \cdots$ è un riordinamento di $a_1^{(+)} +' a_2^{(+)} +' \cdots$ e $b_1^{(-)} +' b_2^{(-)} +' \cdots$ è un riordinamento di $a_1^{(-)} +' a_2^{(-)} +' \cdots$ Dunque

$$b_1^{(+)} + b_2^{(+)} + \cdots = a_1^{(+)} + a_2^{(+)} + \cdots \qquad \text{e} \qquad b_1^{(-)} + b_2^{(-)} + \cdots = a_1^{(-)} + a_2^{(-)} + \cdots$$

e quindi, poiché $b_k = b_k^{(+)} - b_k^{(-)}$, per la linearità si ha

$$b_1 + b_2 + \cdots = (b_1^{(+)} + b_2^{(+)} + \cdots) - (b_1^{(-)} +' b_2^{(-)} +' \cdots)$$

e perciò $b_1 + b_2 + \cdots = a_1 + a_2 + \cdots$ □

Dimostrazione (del Teorema 3.11)

Supponiamo inizialmente che la serie $a_1 +' a_2 +' \cdots$ sia a termini reali.

Definiti $a_k^{(+)}$ e $a_k^{(-)}$ come nel Lemma 3.24 si ha

- per il medesimo Lemma 3.24, la serie $a_1 +' a_2 +' \cdots$ è assolutamente convergente se e solo se entrambe le serie $a_1^{(+)} +' a_2^{(+)} +' \cdots$ e $a_1^{(-)} +' a_2^{(-)} +' \cdots$ sono convergenti;

- essendo $|a_k| = a_k^{(+)} + a_k^{(-)}$ e quindi

$$|a_1| + \cdots + |a_n| = (a_1^{(+)} + \cdots + a_n^{(+)}) + (a_1^{(-)} + \cdots + a_n^{(-)})$$

  se entrambe le serie $a_1^{(+)} +' a_2^{(+)} +' \cdots$ e $a_1^{(-)} +' a_2^{(-)} +' \cdots$ sono convergenti, la serie $|a_1| +' |a_2| +' \cdots$ è convergente;

- essendo $a_k^{(+)} \leqslant |a_k|$ e $a_k^{(-)} \leqslant |a_k|$, se $|a_1| +' |a_2| +' \cdots$ è convergente, per il criterio del confronto, entrambe le serie $a_1^{(+)} +' a_2^{(+)} +' \cdots$ e $a_1^{(-)} +' a_2^{(-)} +' \cdots$ risultano convergenti.

Allora: se $a_1 +' a_2 +' \cdots$ è assolutamente convergente, entrambe le serie $a_1^{(+)} +' a_2^{(+)} +' \cdots$ e $a_1^{(-)} +' a_2^{(-)} +' \cdots$ sono convergenti (primo punto) e quindi $|a_1| +' |a_2| +' \cdots$ è convergente (secondo punto); se $|a_1| +' |a_2| +' \cdots$ è convergente, entrambe le serie $a_1^{(+)} +' a_2^{(+)} +' \cdots$ e $a_1^{(-)} +' a_2^{(-)} +' \cdots$ sono convergenti (terzo punto) e quindi $a_1 +' a_2 +' \cdots$ è assolutamente convergente (primo punto).

Siano adesso $a_k \in \mathbb{C}$. Posto $\sigma_k = Re(a_k)$ e $\omega_k = Im(a_k)$, si ha

- se $a_1 +' a_2 +' \cdots$ è (assolutamente) convergente allora entrambe le serie $\sigma_1 +' \sigma_2 +' \cdots$ e $\omega_1 +' \omega_2 +' \cdots$ sono (assolutamente) convergenti;

- se le serie a termini reali $\sigma_1 +' \sigma_2 +' \cdots$ e $\omega_1 +' \omega_2 +' \cdots$ sono assolutamente convergenti, per quanto mostrato nel caso precedente, le serie $|\sigma_1| +' |\sigma_2| +' \cdots$ e $|\omega_1| +' |\omega_2| +' \cdots$ sono convergenti e perciò (linearità) lo è anche la serie $(|\sigma_1| + |\omega_1|) +' (|\sigma_2| + |\omega_2|) +' \cdots$;

- siccome $|a_k| \leqslant |\sigma_k| + |\omega_k|$, allora se le serie $|\sigma_1| +' |\sigma_2| +' \cdots$ e $|\omega_1| +' |\omega_2| +' \cdots$ sono convergenti, per il punto precedente e per il criterio del confronto, anche $|a_1| +' |a_2| +' \cdots$ lo è;

- siccome $|\sigma_k| \leqslant |a_k|$ e $|\omega_k| \leqslant |a_k|$ allora se $|a_1| +' |a_2| +' \cdots$ è convergente, per il criterio del confronto entrambe le serie $|\sigma_1| +' |\sigma_2| +' \cdots$ e $|\omega_1| +' |\omega_2| +' \cdots$ sono convergenti.

Allora: se $a_1 +' a_2 +' \cdots$ è assolutamente convergente, per il primo, secondo e terzo punto, la serie $|a_1| +' |a_2| +' \cdots$ è convergente; se $|a_1| +' |a_2| +' \cdots$ è convergente, per il quarto punto entrambe le serie $|\sigma_1| +' |\sigma_2| +' \cdots$ e $|\omega_1| +' |\omega_2| +' \cdots$ sono convergenti e quindi (per quanto mostrato nel caso reale) $\sigma_1 +' \sigma_2 +' \cdots$ e $\omega_1 +' \omega_2 +' \cdots$ sono assolutamente convergenti, e perciò, per la definizione di σ_k e ω_k, anche $a_1 +' a_2 +' \cdots$ è assolutamente convergente.

L'asserto riguardante le somme dei riordinamenti si ottiene dal Lemma 3.25. $\square$