Dipartimento di Matematica Applicata
« Ulisse Dini »

Appunti di Analisi Matematica 2

M. Ciampa

Corso di Laurea in Ingegneria Elettronica

a.a. 2006/2007

Gli asserti contrassegnati col simbolo ★ possono essere omessi senza pregiudicare l'operatività del testo — ma a danno della comprensione dell'argomento...

Capitolo 1

Equazioni differenziali lineari a coefficienti costanti

Sia J un intervallo aperto non vuoto di $\mathbb{R}$, e sia $f : J \to \mathbb{C}$ una funzione *a valori in* $\mathbb{C}$.

Se per ogni $t \in J$ si ha $f(t) \in \mathbb{R}$, f è una *funzione a valori reali.* In particolare, indicando con $\bar{c}$ il coniugato di $c \in \mathbb{C}$, per ogni $f : J \to \mathbb{C}$ sono funzioni a valori reali

$$Re(f) = \frac{f + \bar{f}}{2} \quad \text{e} \quad Im(f) = \frac{f - \bar{f}}{2i}$$

Posto $\sigma = Re(f)$ e $\omega = Im(f)$, da cui $f = \sigma + i\,\omega$, si ricordi che la funzione f è continua su J se lo sono σ e ω. Analogamente, per m intero positivo, f è di classe $\mathcal{C}^m$ su J se la derivata $m-$esima delle funzioni σ e ω esiste ed è continua su J. In tal caso, per $k \in \{\,1, \dots, m\,\}$, per la derivata $k-$esima di f si ha $f^{(k)} = \sigma^{(k)} + i\,\omega^{(k)}$. Infine, f è di classe $\mathcal{C}^\infty$ su J se f è di classe $\mathcal{C}^m$ su J per ogni intero positivo m.

L'insieme delle funzioni a valori in $\mathbb{C}$ continue su J si indica con $\mathcal{C}(J, \mathbb{C})$ o, equivalentemente, con $\mathcal{C}^0(J, \mathbb{C})$; quello delle funzioni a valori in $\mathbb{C}$ di classe $\mathcal{C}^m$ su J con $\mathcal{C}^m(J, \mathbb{C})$ e quello delle funzioni a valori in $\mathbb{C}$ di classe $\mathcal{C}^\infty$ su J con $\mathcal{C}^\infty(J, \mathbb{C})$.

Si osservi che, con le usuali definizioni di somma e di prodotto per un elemento di $\mathbb{C}$, gli insiemi $\mathcal{C}(J, \mathbb{C})$, $\mathcal{C}^m(J, \mathbb{C})$ e $\mathcal{C}^\infty(J, \mathbb{C})$ sono spazi vettoriali su $\mathbb{C}$.

Per $f_1, \dots, f_m : J \to \mathbb{C}$, si indica con $\langle f_1, \dots, f_m \rangle$ l'insieme delle combinazioni lineari di $f_1, \dots, f_m$ a coefficienti in $\mathbb{C}$ e con $\langle f_1, \dots, f_m \rangle_{\mathbb{R}}$ l'insieme delle combinazioni lineari di $f_1, \dots, f_m$ a coefficienti in $\mathbb{R}$.

1.1 Definizioni e prime proprietà

1.1 Definizione

Siano n intero positivo, e $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{C}$, $a_0 \neq 0$. L'applicazione lineare

$$L : \mathcal{C}^n(J, \mathbb{C}) \to \mathcal{C}^0(J, \mathbb{C})$$

definita da

$$L(z) = a_0 z^{(n)} + a_1 z^{(n-1)} + \ldots + a_n z$$

si chiama *operatore differenziale* (in $\mathcal{C}^n(J, \mathbb{C})$) *lineare a coefficienti costanti di ordine* n.

Il polinomio

$$a_0 Z^n + a_1 Z^{n-1} + \ldots + a_n \in \mathbb{C}[Z]$$

si chiama *polinomio caratteristico di* L.

Sia r una funzione *continua* su J. L'equazione

$$L(z) = r$$

si chiama *equazione differenziale lineare a coefficienti costanti di ordine n.*

Gli elementi del dominio di L che hanno per immagine r, cioè le funzioni $w \in \mathcal{C}^n(J, \mathbb{C})$ tali che $L(w) = r$, si chiamano **soluzioni** dell'equazione differenziale $L(z) = r$.

L'equazione

$$L(z) = 0$$

si chiama *equazione omogenea associata a $L(z) = r$.*

1.2 Osservazione (importante!)

Sia L un operatore differenziale lineare a coefficienti costanti di ordine n. Si osservi che se $w \in \mathcal{C}^n(J, \mathbb{C})$, allora $L(w) \in \mathcal{C}^0(J, \mathbb{C})$, e quindi: se r è una funzione *non continua* su J, per *nessun* elemento $w \in \mathcal{C}^n(J, \mathbb{C})$ si ha $L(w) = r$. Ad esempio, con $n = 1$ e $J = \mathbb{R}$, per nessuna funzione $w \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ si ha

$$w^{(1)} = r \quad \text{con} \quad r(t) = \begin{cases} 0 & \text{per } t \leqslant 0 \\ 1 & \text{per } t > 0 \end{cases}$$

Questo spiega perché nella definizione precedente si richiede che r sia continua.

1.3 Osservazione (struttura dell'insieme delle soluzioni)

Sia $L(z) = r$ un'equazione differenziale lineare a coefficienti costanti di ordine n.

Poichè L è lineare, allora: o l'equazione non ha soluzioni oppure, detta $\hat{z}$ una soluzione ("soluzione particolare"), l'insieme di *tutte* le soluzioni è

$$\hat{z} + \ker L$$

Si osservi che $\ker L$ — l'insieme delle soluzioni dell'equazione $L(z) = 0$ — è un sottospazio vettoriale di $\mathcal{C}^n(J, \mathbb{C})$.

La Sezione 1.2 è dedicata allo studio del nucleo di L. Nella Sezione 1.3 vedremo come determinare una soluzione particolare dell'equazione mostrando così che l'insieme delle soluzioni è non vuoto.

1.2 Nucleo di un operatore differenziale lineare a coefficienti costanti

Sia L un'operatore differenziale in $\mathcal{C}^n(J, \mathbb{C})$ lineare a coefficienti costanti. In questa Sezione si mostra come determinare il nucleo di L utilizzando la nozione di operatore differenziale in $\mathcal{C}^\infty(J, \mathbb{C})$ lineare a coefficienti costanti.

1.4 Osservazione ($\ker L \subset \mathcal{C}^\infty(J, \mathbb{C})$)

Sia L definito da $L(z) = a_0 z^{(n)} + a_1 z^{(n-1)} + \cdots + a_n z, a_0 \neq 0$. Se w è un elemento del nucleo di L allora $a_0 w^{(n)} = -a_1 w^{(n-1)} - \cdots - a_n w$. Poichè $w \in \mathcal{C}^n(J, \mathbb{C})$, ne segue che $w^{(n)} \in \mathcal{C}^1(J, \mathbb{C})$ e quindi $w \in \mathcal{C}^{n+1}(J, \mathbb{C})$.

Iterando il ragionamento si ottiene che $\ker L$ è un sottospazio di $\mathcal{C}^\infty(J, \mathbb{C})$.

1.5 Definizione

Sia $D : \mathcal{C}^\infty(J, \mathbb{C}) \to \mathcal{C}^\infty(J, \mathbb{C})$ l'applicazione lineare definita da $D(\phi) = \phi^{(1)}$.

Gli elementi di $\mathbb{C}[D]$, cioè i polinomi in D a coefficienti in $\mathbb{C}$, si chiamano *operatori differenziali in $\mathcal{C}^\infty(J, \mathbb{C})$ lineari a coefficienti costanti.*

1.6 Esempio

1) Sia $p(Z) = Z^4 - 5Z^2 - 2 \in \mathbb{C}[Z]$. Si indica con $p(D)$ l'operatore $D^4 - 5D^2 - 2$, cioè l'operatore differenziale in $\mathcal{C}^\infty(J, \mathbb{C})$ lineare a coefficienti costanti tale che

$$p(D)(z) = z^{(4)} - 5z^{(2)} - 2z$$

Per $\phi \in \mathcal{C}^\infty(J, \mathbb{C})$, l'elemento $p(D)(\phi)$ si indicherà anche con $p(D)\phi$.

2) Siano $p(Z), p_1(Z)$ e $p_2(Z) \in \mathbb{C}[Z]$ tali che $p(Z) = p_1(Z)p_2(Z)$. Si ha

$$p(D) = p_1(D)p_2(D) = p_2(D)p_1(D)$$

cioè: per ogni $\phi \in \mathcal{C}^\infty(J, \mathbb{C})$ si ha

$$p(D)\phi = p_1(D)(p_2(D)\phi) = p_2(D)(p_1(D)\phi)$$

Ad esempio, se $p(Z) = (Z-1)^2 = Z^2 - 2Z + 1$ si ha

$$(D-1)((D-1)\phi) = (D-1)(\phi^{(1)} - \phi) = \phi^{(2)} - \phi^{(1)} - \phi^{(1)} + \phi = p(D)\phi$$

1.7 Osservazione

Sia $p(Z) \in \mathbb{C}[Z]$ il polinomio caratteristico di L. Per ogni $\phi \in \mathcal{C}^\infty(J, \mathbb{C})$ si ha $L(\phi) = p(D)\phi$ e quindi, per l'Osservazione 1.4, $\ker L = \ker p(D)$.

Dunque: per determinare il nucleo di un operatore differenziale L in $\mathcal{C}^n(J, \mathbb{C})$, basta determinare il nucleo dell'operatore differenziale in $\mathcal{C}^\infty(J, \mathbb{C})$ individuato dal polinomio caratteristico di L.

1.8 Teorema (nucleo di un operatore differenziale in $\mathcal{C}^\infty(J, \mathbb{C})$)

Sia $p(Z) = a_0 Z^n + \cdots + a_n \in \mathbb{C}[Z], a_0 \neq 0$, e sia

$$p(Z) = a_0(Z - \alpha_1)^{q_1} \cdots (Z - \alpha_k)^{q_k}$$

con $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{C}$, distinti, e $q_1, \ldots, q_k$ interi positivi.

Allora:

1) $\ker p(D) = \ker(D - \alpha_1)^{q_1} \oplus \cdots \oplus \ker(D - \alpha_k)^{q_k}$;

2) per $j = 1, \ldots, k$ si ha

$$\ker(D - \alpha_j)^{q_j} = \langle e^{\alpha_j t}, te^{\alpha_j t}, \ldots, t^{q_j - 1}e^{\alpha_j t} \rangle$$

e quindi $\dim \ker(D - \alpha_j)^{q_j} = q_j$;

3) $\dim \ker p(D) = n$.

Dimostrazione

1) Vedere l'Esempio 1.9 per la dimostrazione in un caso concreto.
2) Vedere l'Esempio 1.10 per la dimostrazione in un caso concreto.
3) Conseguenza immediata dei punti precedenti, poiché $q_1 + \cdots + q_k = n$. □

1.9 Esempio (★)

Sia $p(Z) = (Z-1)^2(Z-2)^2(Z-i)$. Posto $q_1(Z) = (Z-2)^2(Z-i)$, si osservi che $\ker p(D) \supset \ker q_1(D)$ e $\ker p(D) \supset \ker(D-1)^2$; inoltre $(Z-1)^2$ e $q_1(Z)$ sono primi tra loro dunque, per il Teorema 1.30 dell'Appendice, esistono $a(Z), b(Z) \in \mathbb{C}[Z]$ tali che

$$1 = a(Z)(Z-1)^2 + b(Z)q_1(Z)$$

Per ogni $\phi \in \mathcal{C}^\infty(J,\mathbb{C})$ si ha quindi

$$\phi = a(D)(D-1)^2\phi + b(D)q_1(D)\phi$$

Ne segue che:

a) se $\phi \in \ker p(D)$, poiché $p(D) = (D-1)^2 q_1(D)$, si ha

$$a(D)(D-1)^2\phi \in \ker q_1(D) \quad \text{e} \quad b(D)q_1(D)\phi \in \ker(D-1)^2$$

b) se $\psi \in \ker q_1(D) \cap \ker(D-1)^2$ si ha $\psi = a(D)(D-1)^2\psi + b(D)q_1(D)\psi = 0$

e cioè che

$$\ker p(D) = \ker(D-1)^2 \oplus \ker q_1(D)$$

Sia adesso $q_2(Z) = Z - i$ e si osservi che $(Z-2)^2$ e $q_2(Z)$ sono primi tra loro. Ragionando come sopra si prova che

$$\ker q_1(D) = \ker(D-2)^2 \oplus \ker(D-i)$$

Utilizzando i due risultati trovati si ottiene che

$$\ker p(D) = \ker(D-1)^2 \oplus \ker(D-2)^2 \oplus \ker(D-i)$$

1.10 Esempio

Sia $\alpha \in \mathbb{C}$. Per determinare $\ker(D-\alpha)^3$ si può procedere osservando che per ogni $\phi \in \mathcal{C}^\infty(J,\mathbb{C})$ si ha

$$(D-\alpha)(e^{\alpha t}\phi) = e^{\alpha t}D\phi \quad \text{e quindi} \quad (D-\alpha)^3(e^{\alpha t}\phi) = e^{\alpha t}D^3\phi$$

Allora, visto che

$$(D-\alpha)^3 z = 0 \quad \text{se e solo se} \quad (D-\alpha)^3(e^{\alpha t}e^{-\alpha t}z) = 0$$

si ottiene

$$(D-\alpha)^3 z = 0 \quad \text{se e solo se} \quad D^3(e^{-\alpha t}z) = 0$$

cioè

$$(D-\alpha)^3 z = 0 \quad \text{se e solo se} \quad e^{-\alpha t}z \in \langle 1, t, t^2\rangle$$

Infine

$$(D-\alpha)^3 z = 0 \quad \text{se e solo se} \quad z \in \langle e^{\alpha t}, te^{\alpha t}, t^2e^{\alpha t}\rangle$$

L'indipendenza di $e^{\alpha t}, te^{\alpha t}, t^2e^{\alpha t}$ è conseguenza immediata dell'indipendenza di $1, t, t^2$.

1.11 Esempio (uso del Teorema 1.8)

Siano $J = \mathbb{R}$ e L l'operatore dell'equazione differenziale

$$2z^{(3)} - 6z^{(1)} - 4z = 0$$

Detto $p(Z)$ il polinomio caratteristico di L, poiché $p(Z) = 2(Z+1)^2(Z-2)$, per il punto 1) del Teorema 1.8, si ha:

$$\ker L = \ker(D+1)^2 \oplus \ker(D-2)$$

Per il punto 2) dello stesso teorema si ha

$$\ker(D+1)^2 = \langle e^{-t}, te^{-t}\rangle \quad , \quad \ker(D-2) = \langle e^{2t}\rangle$$

quindi

$$\ker L = \langle e^{-t}, te^{-t}\rangle \oplus \langle e^{2t}\rangle = \langle e^{-t}, te^{-t}, e^{2t}\rangle$$

1.3 Soluzione particolare

In questa Sezione si descrive un procedimento che permette di determinare una soluzione di un'equazione differenziale lineare a coefficienti costanti.

1.12 Osservazione (soluzione particolare, equazione di ordine 1)

Siano $z^{(1)} - \alpha z = r$ un'equazione differenziale lineare a coefficienti costanti di ordine 1 e $t_0 \in J$.

Si verifica facilmente che la funzione

$$w(t) = e^{\alpha t} \int_{t_0}^{t} e^{-\alpha\tau} r(\tau)\,\mathrm{d}\tau$$

è una soluzione dell'equazione differenziale.

Quindi l'insieme delle soluzioni dell'equazione differenziale è non vuoto e, per l'Osservazione 1.3 e il Teorema 1.8, tale insieme è

$$w + \ker(D - \alpha) = w + \langle e^{\alpha t} \rangle$$

Si osservi infine che se per un intero $m \geqslant 0$ si ha $r \in \mathcal{C}^m(J, \mathbb{C})$, allora

$$e^{-\alpha t} r \in \mathcal{C}^m(J, \mathbb{C}) \qquad \text{e} \qquad \int_{t_0}^{t} e^{-\alpha\tau} r(\tau)\,\mathrm{d}\tau \in \mathcal{C}^{m+1}(J, \mathbb{C})$$

e perciò $w \in \mathcal{C}^{m+1}(J, \mathbb{C})$. Dunque tutte le soluzioni dell'equazione differenziale sono in $\mathcal{C}^{m+1}(J, \mathbb{C})$.

1.13 Teorema (soluzione particolare, equazione di ordine n)

Sia $L(z) = r$ un'equazione differenziale di ordine n con operatore L di polinomio caratteristico $p(Z) \in \mathbb{C}[Z]$ e sia:

$$p(Z) = (Z - \alpha_1) \cdots (Z - \alpha_n)$$

Si considerino le funzioni definite dalla procedura seguente:

1) w_1 = una soluzione dell'equazione $z^{(1)} - \alpha_1 z = r$;

2) w_2 = una soluzione dell'equazione $z^{(1)} - \alpha_2 z = w_1$;

$\vdots$

n) w_n = una soluzione dell'equazione $z^{(1)} - \alpha_n z = w_{n-1}$.

Allora w_n è una soluzione dell'equazione $L(z) = r$. Dunque l'insieme (non vuoto) delle soluzioni dell'equazione è

$$w_n + \ker L$$

Inoltre, se $r \in \mathcal{C}^m(J, \mathbb{C})$ per un intero $m \geqslant 0$ si ha $w_n \in \mathcal{C}^{m+n}(J, \mathbb{C})$ e quindi tutte le soluzioni dell'equazione sono in $\mathcal{C}^{m+n}(J, \mathbb{C})$.

Dimostrazione

L'Esempio 1.14 illustra l'idea della dimostrazione provando gli asserti per $n = 2$. □

1.14 Esempio (★)

Sia $L(z) = r$ un'equazione differenziale di ordine 2 con L definito da

$$L(z) = z^{(2)} + a_1 z^{(1)} + a_2 z$$

Detto $p(Z)$ il polinomio caratteristico di L, sia

$$p(Z) = Z^2 + a_1 Z + a_2 = (Z - \alpha_1)(Z - \alpha_2)$$

e quindi

$$a_1 = -(\alpha_1 + \alpha_2) \quad \text{e} \quad a_2 = \alpha_1 \alpha_2$$

Siano: w_1 una soluzione dell'equazione differenziale $z^{(1)} - \alpha_1 z = r$, w_2 una soluzione dell'equazione differenziale $z^{(1)} - \alpha_2 z = w_1$. Si noti che l'esistenza delle funzioni w_1, w_2 è assicurata dall'Osservazione 1.12. Per la stessa Osservazione, siccome $r \in \mathcal{C}^0(J, \mathbb{C})$ allora $w_1 \in \mathcal{C}^1(J, \mathbb{C})$ e di conseguenza $w_2 \in \mathcal{C}^2(J, \mathbb{C})$.

Per definizione di soluzione si ha che

1) $w_1^{(1)} - \alpha_1 w_1 = r$

2) $w_2^{(1)} - \alpha_2 w_2 = w_1$

Da 2) si ricava

$$w_1^{(1)} = w_2^{(2)} - \alpha_2 w_2^{(1)}$$

Sostituendo in 1) si ottiene

$$r = w_2^{(2)} - \alpha_2 w_2^{(1)} - \alpha_1 w_2^{(1)} + \alpha_1 \alpha_2 w_2 = w_2^{(2)} - (\alpha_1 + \alpha_2) w_2^{(1)} + \alpha_1 \alpha_2 w_2 = L(w_2)$$

Dunque $w_2 \in \mathcal{C}^2(J, \mathbb{C})$ e $L(w_2) = r$, cioè w_2 è una soluzione dell'equazione differenziale $L(z) = r$.

Infine, se $r \in \mathcal{C}^m(J, \mathbb{C})$ per un intero $m \geqslant 0$, per l'Osservazione 1.12 si ha $w_1 \in \mathcal{C}^{m+1}(J, \mathbb{C})$ e quindi $w_2 \in \mathcal{C}^{m+2}(J, \mathbb{C})$.

1.15 Osservazione

Se r è un elemento non nullo del nucleo di un operatore differenziale lineare a coefficienti costanti, per determinare una soluzione dell'equazione $L(z) = r$ si può utilizzare, in alternativa a quella descritta nel Teorema 1.13, la procedura seguente.

1.16 Procedura (metodo degli annichilatori)

Sia $L(z) = r$ un'equazione differenziale di ordine n con $r \neq 0$, e sia M un operatore differenziale di ordine m tale che $r \in \ker M$. Detti $\lambda(Z)$ il polinomio caratteristico di L e $\mu(Z)$ quello di M

a) determinare una base $v_1, \ldots, v_n$ di $\ker \lambda(D)$;

b) determinare una base di $\ker \mu(D)\lambda(D)$ della forma $v_1, \ldots, v_n, v_{n+1}, \ldots, v_{n+m}$;

c) determinare l'elemento $w \in \langle v_{n+1}, \ldots, v_{n+m} \rangle$ che è soluzione dell'equazione $L(z) = r$.

1.17 Esempio

Sia consideri l'equazione

$$z^{(2)} - z^{(1)} - 2z = r \quad , \quad r = e^{-t} \in \ker(D+1)$$

In questo caso, detto L l'operatore dell'equazione, si ha:

a) il polinomio caratteristico $\lambda(Z)$ di L si fattorizza in $\lambda(Z) = (Z+1)(Z-2)$ e quindi e^{-t}, e^{2t} è una base di $\ker \lambda(D)$;

b) $(D+1)\lambda(D) = (D+1)^2(D-2)$ e quindi e^{-t}, e^{2t}, te^{-t} è una base di $\ker(D+1)\lambda(D)$ della forma richiesta;

c) l'elemento di $\langle te^{-t}\rangle$ che è soluzione dell'equazione $L(z) = r$ risulta essere $-\frac{1}{3}te^{-t}$.

Dimostrazione della Procedura 1.16 (★)
Si ha:

1) per l'Osservazione 1.4, $r \in \mathcal{C}^\infty(J, \mathbb{C})$ e quindi, per il Teorema 1.13, tutte le soluzioni dell'equazione sono in $\mathcal{C}^\infty(J, \mathbb{C})$; allora (si ricordi l'Osservazione 1.7): le soluzioni di $L(z) = r$ coincidono con le soluzioni di $\lambda(D)z = r$;

2) per l'Osservazione 1.7 si ha $\ker M = \ker \mu(D)$ e quindi $r \in \ker \mu(D)$, perciò se $\lambda(D)z = r$ allora $\mu(D)\lambda(D)z = \mu(D)r = 0$; dunque: tutte le soluzioni dell'equazione $\lambda(D)z = r$ sono in $\ker \mu(D)\lambda(D)$;

3) detta $v_1, \ldots, v_n$ una base di $\ker \lambda(D)$, poiché $\ker \mu(D)\lambda(D) \supset \ker \lambda(D)$, esiste una base di $\ker \mu(D)\lambda(D)$ della forma $v_1, \ldots, v_n, v_{n+1}, \ldots, v_{n+m}$ e quindi, posto $\Delta = \langle v_{n+1}, \ldots, v_{n+m}\rangle$, si ha: $\ker \mu(D)\lambda(D) = \ker \lambda(D) \oplus \Delta$;

4) se $w_\lambda \in \ker \lambda(D)$ e $w_\Delta \in \Delta$, l'elemento $w_\lambda + w_\Delta$ di $\ker \mu(D)\lambda(D)$ è soluzione dell'equazione differenziale $\lambda(D)z = r$ se e solo se lo è w_Δ e quindi: Δ contiene certamente qualche soluzione dell'equazione;

5) se $w_1, w_2 \in \Delta$ sono soluzioni dell'equazione $\lambda(D)z = r$, allora l'elemento $w_1 - w_2$ di Δ è soluzione dell'equazione omogenea $\lambda(D)z = 0$, e quindi $w_1 - w_2 \in \ker \lambda(D) \cap \Delta$; poiché $\ker \lambda(D) \cap \Delta = \{\, 0 \,\}$, ne segue che: Δ contiene una sola soluzione dell'equazione differenziale $L(z) = r$.

Queste considerazioni giustificano la procedura. □

1.4 Condizioni iniziali

In questa Sezione si introduce la nozione di *condizione iniziale* e si mostra che, data un'equazione differenziale $L(z) = r$, "esiste una sola soluzione dell'equazione che soddisfa condizioni iniziali assegnate."

1.18 Definizione (condizioni iniziali)
Siano $L(z) = r$ un'equazione differenziale di ordine n, $t_0 \in J$ e $z_0, \ldots, z_{n-1} \in \mathbb{C}$.
Una funzione w è una soluzione dell'equazione differenziale che verifica le *condizioni iniziali (all'istante* t_0*)* $z(t_0) = z_0, \ldots, z^{(n-1)}(t_0) = z_{n-1}$ se

$$w \in \mathcal{C}^n(J, \mathbb{C}) \quad , \quad L(w) = r \qquad \text{e} \qquad w(t_0) = z_0, \ldots, w^{(n-1)}(t_0) = z_{n-1}$$

1.19 Osservazione (esistenza ed unicità per equazioni omogenee, ordine 1)
Siano $L(z) = 0$ un'equazione differenziale di ordine 1, $t_0 \in J$ e $z_0 \in \mathbb{C}$. Detto $p(Z)$ il polinomio caratteristico di L, sia $p(Z) = a_0(Z - \alpha)$.
Si verifica immediatamente che

$$w(t) = e^{\alpha(t-t_0)} z_0$$

è l'unico elemento di $\ker L$ che assume in t_0 valore z_0.
Dunque: esiste una sola soluzione dell'equazione differenziale che verifica la condizione iniziale $z(t_0) = z_0$.

1.20 Teorema (esistenza ed unicità per equazioni omogenee, ordine n)

Siano $L(z) = 0$ un'equazione differenziale di ordine n, $t_0 \in J$ e $z_0, \ldots, z_{n-1} \in \mathbb{C}$.

Esiste una sola soluzione dell'equazione che verifica le condizioni iniziali $z(t_0) = z_0$, $\ldots$, $z^{(n-1)}(t_0) = z_{n-1}$.

L'applicazione che associa a $(z_0, \ldots, z_{n-1})^\mathsf{T}$ l'unica soluzione dell'equazione che verifica le condizioni iniziali $z(t_0) = z_0$, $\ldots$, $z^{(n-1)}(t_0) = z_{n-1}$ è un isomorfismo tra $\mathbb{C}^n$ e $\ker L$.

Dimostrazione (★)

Sia $\rho_{t_0} : \ker L \to \mathbb{C}^n$ l'applicazione lineare definita da

$$\rho_{t_0}(z) = \begin{bmatrix} z(t_0) \\ \vdots \\ z^{(n-1)}(t_0) \end{bmatrix}$$

Provare l'asserto equivale a dimostrare che ρ_{t_0} è invertibile, ossia che il nucleo di ρ_{t_0} è costituito dal solo elemento 0 (mostrando così che ρ_{t_0} è un isomorfismo tra $\mathbb{C}^n$ e $\ker L$ — si ricordi che $\dim \ker L = n$).

Si ricordi che, detto $p(Z)$ il polinomio caratteristico di L, per l'Osservazione 1.7 si ha $\ker L = \ker p(D)$.

Siano $\alpha \in \mathbb{C}$ e $q(Z) \in \mathbb{C}[Z]$ tali che $p(Z) = (Z - \alpha)q(Z)$ e si osservi che $q(Z)$ ha grado $n - 1$.

Se $w \in \ker L$ e $\rho_{t_0}(w) = 0$, cioè

$$L(w) = p(D)w = 0 \qquad \text{e} \qquad w(t_0) = \cdots = w^{(n-1)}(t_0) = 0$$

allora, poiché $p(D) = (D - \alpha)q(D)$, per la funzione $v = q(D)w \in \mathcal{C}^\infty(J, \mathbb{C})$ si ha

$$(D - \alpha)v = 0 \quad \text{e} \quad v(t_0) = (q(D)w)(t_0) = 0$$

Per l'Osservazione 1.19 si ha allora $v = 0$. Quindi w verifica le condizioni

$$q(D)w = 0 \quad \text{e} \quad w(t_0) = \cdots = w^{(n-2)}(t_0) = 0$$

Iterando il ragionamento $n - 1$ volte si conclude che $w = 0$. □

1.21 Esempio

Sia $J = \mathbb{R}$. Per determinare la soluzione dell'equazione differenziale

$$2z^{(3)} - 6z^{(1)} - 4z = 0$$

che verifica le condizioni iniziali

$$z(1) = 9 \quad , \quad z^{(1)}(1) = -9 \quad , \quad z^{(2)}(1) = 18$$

si osservi che, per quanto ottenuto nell'Esempio 1.11, si cercano $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{C}$ tali che, posto

$$w(t) = c_1 e^{-t} + c_2 t e^{-t} + c_3 e^{2t}$$

si abbia

$$w(1) = 9 \quad , \quad w^{(1)}(1) = -9 \quad , \quad w^{(2)}(1) = 18$$

Poiché

$$w^{(1)}(t) = (-c_1 + c_2)e^{-t} - c_2 t e^{-t} + 2c_3 e^{2t} \quad , \quad w^{(2)}(t) = (c_1 - 2c_2)e^{-t} + c_2 t e^{-t} + 4c_3 e^{2t}$$

il problema equivale a risolvere il sistema

$$\begin{bmatrix} e^{-1} & e^{-1} & e^2 \\ -e^{-1} & 0 & 2e^2 \\ e^{-1} & -e^{-1} & 4e^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ -9 \\ 18 \end{bmatrix}$$

Il Teorema 1.20 garantisce che il sistema ha una sola soluzione, che risulta essere

$$c_1 = 11e \quad , \quad c_2 = -3e \quad , \quad c_3 = \frac{1}{e^2}$$

La soluzione cercata dell'equazione differenziale è quindi

$$w(t) = 11e^{1-t} - 3te^{1-t} + e^{2(t-1)}$$

Esercizio (**importante!**): siano w_1 la soluzione dell'equazione differenziale che verifica le condizioni iniziali

$$z(1) = 1 \quad , \quad z^{(1)}(1) = 0 \quad , \quad z^{(2)}(1) = 0$$

w_2 quella che verifica le condizioni iniziali

$$z(1) = 0 \quad , \quad z^{(1)}(1) = 1 \quad , \quad z^{(2)}(1) = 0$$

e w_3 quella che verifica le condizioni iniziali

$$z(1) = 0 \quad , \quad z^{(1)}(1) = 0 \quad , \quad z^{(2)}(1) = 1$$

Verificare che, come garantito dal Teorema 1.20:

$$w = 9\,w_1 - 9\,w_2 + 18\,w_3$$

1.22 Osservazione (esistenza ed unicità per equazioni non omogenee)
Siano $L(z) = r$ un'equazione differenziale di ordine n, $t_0 \in J$ e $z_0, \ldots, z_{n-1} \in \mathbb{C}$.

1) Sia g una soluzione dell'equazione differenziale $L(z) = r$. Detta s la soluzione dell'equazione $L(z) = 0$ che verifica le condizioni iniziali $z(t_0) = z_0 - g(t_0), \ldots, z^{(n-1)}(t_0) = z_{n-1} - g^{(n-1)}(t_0)$ si ponga $w = g + s$. Allora: w è una soluzione dell'equazione $L(z) = r$ che verifica le condizioni iniziali $z(t_0) = z_0, \ldots, z^{(n-1)}(t_0) = z_{n-1}$.

2) Se w_1, w_2 sono due soluzioni dell'equazione $L(z) = r$ che verificano le condizioni iniziali $z(t_0) = z_0, \ldots, z^{(n-1)}(t_0) = z_{n-1}$, allora la funzione $w_1 - w_2$ è una soluzione dell'equazione $L(z) = 0$ che verifica le condizioni iniziali $z(t_0) = 0, \ldots, z^{(n-1)}(t_0) = 0$. Per il Teorema 1.20 si ha $w_1 = w_2$.

I due asserti provano che esiste una sola soluzione dell'equazione differenziale $L(z) = r$ che verifica le condizioni iniziali $z(t_0) = z_0, \ldots, z^{(n-1)}(t_0) = z_{n-1}$.

Si osservi infine che, detta f la soluzione dell'equazione $L(z) = r$ che verifica le condizioni iniziali $z(t_0) = 0, \ldots, z^{(n-1)}(t_0) = 0$ ("**soluzione forzata**") e ℓ la soluzione dell'equazione $L(z) = 0$ che verifica le condizioni iniziali $z(t_0) = z_0, \ldots, z^{(n-1)}(t_0) = z_{n-1}$ ("**soluzione libera**"), la soluzione dell'equazione $L(z) = r$ che verifica le condizioni iniziali $z(t_0) = z_0, \ldots, z^{(n-1)}(t_0) = z_{n-1}$ è $f + \ell$.

1.23 Osservazione (sul determinismo)
Se l'equazione differenziale $L(z) = r$ è la legge fisica che governa una grandezza w, quanto provato in questa Sezione si può esprimere dicendo che l'andamento di w, sia per $t > t_0$ — nel "futuro" — che per $t < t_0$ — nel "passato" —, è determinato univocamente dalle condizioni iniziali all'istante t_0. Ad esempio, la legge fisica che governa la quota x di un corpo puntiforme di massa m in caduta libera nei pressi della superficie terrestre è (dopo opportune semplificazioni) $mx^{(2)} = mg$. L'andamento di x è determinato in modo univoco dai valori $x(0)$ e $x^{(1)}(0)$.

1.5 Equazioni differenziali reali

In questa Sezione si considera un'equazione differenziale $L(z) = r$ in cui l'operatore L, definito da
$$L(z) = a_0 z^{(n)} + a_1 z^{(n-1)} + \ldots + a_n z$$
ha *coefficienti reali* (cioè $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$, $a_0 \neq 0$) e $r \in \mathcal{C}(J, \mathbb{C})$ è una funzione a *valori reali* — un'equazione di tal genere si chiama *equazione differenziale reale* — e se ne cercano le *soluzioni a valori reali.*

1.24 Osservazione (esistenza di soluzioni a valori reali)
Se $\phi : J \to \mathbb{C}$ è soluzione dell'equazione differenziale reale $L(z) = r$ si verifica immediatamente che

1) $Re(\phi)$ è una soluzione (a valori reali) dell'equazione differenziale $L(z) = r$;

2) $Im(\phi)$ è una soluzione (a valori reali) dell'equazione omogenea $L(z) = 0$.

1.25 Teorema (nucleo di un operatore a coefficienti reali)
Siano σ, ω reali, $\omega \neq 0$, e q intero positivo. Allora, posto $\alpha = \sigma + i\omega$ si ha

$$\ker(D - \alpha)^q \oplus \ker(D - \bar{\alpha})^q = \langle e^{\sigma t} \cos \omega t, e^{\sigma t} \operatorname{sen} \omega t, \ldots, t^{q-1} e^{\sigma t} \cos \omega t, t^{q-1} e^{\sigma t} \operatorname{sen} \omega t \rangle$$

Questo consente di determinare una base del nucleo di un operatore a coefficienti reali costituita da funzioni a valori reali.

Dimostrazione
Vedere l'Esempio 1.26. □

1.26 Esempio
Sia L l'operatore a coefficienti reali definito da $L(z) = z^{(3)} - 3z^{(2)} + z^{(1)} - 3z$. Per il polinomio caratteristico $p(Z)$ di L si ha $p(Z) = (Z - 3)(Z + i)(Z - i)$. Allora, per il Teorema 1.8 si ha

a) $\ker L = \ker(D - 3) \oplus \ker(D + i) \oplus \ker(D - i)$,

b) $\ker(D - 3) = \langle e^{3t} \rangle$,

c) $\ker(D + i) \oplus \ker(D - i) = \langle e^{it} \rangle \oplus \langle e^{-it} \rangle = \langle e^{it}, e^{-it} \rangle$.

Per le formule di Eulero si ha anche

$$\langle e^{it}, e^{-it} \rangle = \langle \operatorname{sen} t, \cos t \rangle$$

e quindi $\ker(D + i) \oplus \ker(D - i) = \langle \operatorname{sen} t, \cos t \rangle$.
Infine:
$$e^{3t}, \operatorname{sen} t, \cos t$$
è una base di $\ker L$ costituita da funzioni a valori reali.

1.27 Teorema (soluzioni a valori reali di un'equazione differenziale reale)
Sia $L(z) = r$ un'equazione differenziale reale di ordine n, sia f una soluzione a valori reali e sia $u_1, \ldots, u_n$ una base di $\ker L$ costituita da funzioni a valori reali.
L'insieme di tutte le soluzioni a valori reali dell'equazione differenziale è

$$f + \langle u_1, \ldots, u_n \rangle_{\mathbb{R}}$$

Dimostrazione (★)

Ovviamente se $\phi \in f + \langle u_1, \dots, u_n \rangle_{\mathbb{R}}$, allora ϕ è soluzione dell'equazione differenziale ed ha valori reali.

Viceversa, se ϕ è una soluzione dell'equazione differenziale si ha $\phi \in f + \langle u_1, \dots, u_n \rangle$ e quindi

$$\phi = f + c_1 u_1 + \cdots + c_n u_n$$

per qualche $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{C}$. Se ϕ ha valori reali si ha $\bar{\phi} = \phi$, cioè:

$$\overline{f + c_1 u_1 + \cdots c_n u_n} = f + \bar{c}_1 u_1 + \cdots \bar{c}_n u_n = f + c_1 u_1 + \cdots c_n u_n$$

e quindi, poiché $u_1, \dots, u_n$ sono linearmente indipendenti su $\mathbb{C}$, $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}$. □

1.28 Osservazione (metodo degli annichilatori e soluzioni a valori reali)

Abbiamo incontrato un'equazione differenziale reale nell'Esempio 1.17 in cui, con il metodo degli annichilatori, si è calcolata una soluzione particolare che risulta a valori reali. La cosa non è fortuita, infatti:

Sia $L(z) = r$ un'equazione differenziale reale di ordine n, e sia $r \in \ker M$ per un operatore differenziale M a coefficienti reali di ordine m. Detti $\lambda(Z)$ il polinomio caratteristico di L e $\mu(Z)$ quello di M, siano $u_1, \dots, u_n$ (rispettivamente: $u_1, \dots, u_n, u_{n+1}, \dots, u_{n+m}$) una base di $\ker \lambda(D)$ (rispettivamente: di $\ker \mu(D)\lambda(D)$) costituita da funzioni a valori reali. Sia inoltre w la soluzione dell'equazione in $\langle u_{n+1}, \dots, u_{n+m} \rangle$ determinata con il metodo degli annichilatori (Procedura 1.16). Siccome, per il punto 1) dell'Osservazione 1.24, anche $Re(w) \in \langle u_{n+1}, \dots, u_{n+m} \rangle$ è soluzione dell'equazione, per l'unicità della soluzione in $\langle u_{n+1}, \dots, u_{n+m} \rangle$ si ha $w = Re(w)$, cioè w è a valori reali. Ragionando come nella Dimostrazione del Teorema 1.27 si prova infine che $w \in \langle u_{n+1}, \dots, u_{n+m} \rangle_{\mathbb{R}}$.

1.29 Osservazione (condizioni iniziali reali)

Siano $t_0 \in J$ e $z_0, \dots, z_{n-1} \in \mathbb{R}$.

Se $\phi : J \to \mathbb{C}$ è la soluzione dell'equazione differenziale reale $L(z) = r$ che verifica le condizioni iniziali $z(t_0) = z_0, \dots, z^{(n-1)}(t_0) = z_{n-1}$, si verifica immediatamente che $Im(\phi)$ è la soluzione dell'equazione omogenea $L(z) = 0$ che verifica le condizioni iniziali $z(t_0) = 0, \dots, z^{(n-1)}(t_0) = 0$, dunque $Im(\phi) = 0$, e cioè che ϕ è a valori reali.

Allora: per un'equazione differenziale reale esiste un'unica soluzione a valori reali che soddisfa condizioni iniziali (reali) assegnate, e per determinarla si può procedere come descritto nell'Esempio 1.21 e nell'Osservazione 1.22.

1.6 Problemi test

(T.1) Siano $J = \mathbb{R}$ e $L(z) = z^{(3)}$. Per ciascuna funzione, indicare se è soluzione dell'equazione differenziale $L(z) = 0$:

$$(a)\ 3\,e^t \qquad (b)\ (1+i)t + e^t \qquad (c)\ t^5 \qquad (d)\ 2t + (3-6i)t^2$$

(T.2) Siano $J = \mathbb{R}$ e $p(D) = D(D+1)$. Per ciascun sottospazio, indicare se è sottoinsieme di $\ker p(D)$:

$$(a)\ \langle e^t, e^{2t} \rangle \qquad (b)\ \langle e^{-t} \rangle \qquad (c)\ \langle e^{-2t}, 1 \rangle \qquad (d)\ \langle 1, t, t^2 \rangle \qquad (e)\ \langle 1, e^{-t} \rangle$$

(T.3) Siano $J = \mathbb{R}$ e $f(t) = t^2$. Per ciascun operatore, indicare se f appartiene al nucleo:

$$(a)\ D \qquad (b)\ D^2 - 1 \qquad (c)\ D^2 \qquad (d)\ D^2(D-1) \qquad (e)\ (D-i)D^3$$

(T.4) Siano $J = \mathbb{R}$ e $L(z) = z^{(4)} - 2z^{(3)}$. Per ciascun asserto, indicare se è vero o falso:

a) $\dim \ker L = 4$;
b) $\dim \ker L = 5$;
c) siano $z_1, z_2 \in \ker L$ tali che $z_1(0) = z_2(0)$; allora $z_1 = z_2$;
d) $\ker L \subset \mathcal{C}^3(J, \mathbb{C})$;
e) $\ker L \subset \mathcal{C}^\infty(J, \mathbb{C})$;
f) sia w la soluzione dell'equazione $L(z) = 0$ che verifica le condizioni iniziali $z(0) = 1$, $z^{(1)}(0) = 0$, $z^{(2)}(0) = 0$, $z^{(3)}(0) = 0$. Allora $g = 5w$ è la soluzione dell'equazione $L(z) = 0$ che verifica le condizioni iniziali $z(0) = 5$, $z^{(1)}(0) = 0$, $z^{(2)}(0) = 0$, $z^{(3)}(0) = 0$.

(T.5) Siano $J = \mathbb{R}$ e L tale che

$$\ker L = \langle 1, t, t^2, e^{-t}, e^{-2t} \rangle$$

Detto $p(Z) \in \mathbb{C}[Z]$ il polinomio caratteristico di L, per ciascun asserto indicare se è vero o falso:

(a) grado $p(Z) = 6$ (b) $p(0) = 0$ (c) $p(2) = 0$ (d) $p(Z) = (Z+1)(Z+2)Z^3$

(T.6) Siano $J = \mathbb{R}$ e $p(D) = D^2 - 2D + 10$. Per ciascuna funzione, indicare se appartiene al nucleo di $p(D)$:

(a) $1 + i$ (b) e^t (c) $\cos 3t + 2i \operatorname{sen} 3t$ (d) $e^t \cos 3t$ (e) $e^t(\cos 3t + 1)$

(T.7) Siano $J = \mathbb{R}$, $L = z^{(4)} - z^{(3)}$, r una funzione continua non nulla, e sia $g \in \mathcal{C}^4(J, \mathbb{C})$ una soluzione dell'equazione differenziale $L(z) = r$. Per ciascun asserto, indicare se è vero o falso:

a) $L(g) = r$;
b) $2g$ è soluzione dell'equazione differenziale $L(z) = r$;
c) $g + 3t$ è soluzione dell'equazione differenziale $L(z) = r$;
d) $7g$ è soluzione dell'equazione differenziale $L(z) = 7r$.

1.7 Esercizi

Negli esercizi di questa sezione, $J = \mathbb{R}$ e L è l'operatore definito da

$$L(z) = z^{(3)} - 7z^{(1)} - 6z$$

Si tenga conto che per il polinomio caratteristico $\lambda(Z)$ di L si ha

$$\lambda(Z) = (Z+1)(Z+2)(Z-3)$$

(E.1) Si utilizzi il metodo degli annichilatori per determinare una soluzione dell'equazione

$$L(z) = e^{2it}$$

(E.2) Dopo aver verificato che per $\alpha \in \mathbb{C}$ si ha

$$L(e^{\alpha t}) = (\alpha^3 - 7\alpha - 6)\, e^{\alpha t} = \lambda(\alpha)\, e^{\alpha t}$$

si consideri l'equazione differenziale

$$L(z) = e^{\alpha t}$$

a) Mostrare che se $\lambda(\alpha) = 0$, allora nessuna soluzione dell'equazione è in $\langle e^{\alpha t} \rangle$.

b) Se $\lambda(\alpha) \neq 0$, verificare che la soluzione dell'equazione determinata con il metodo degli annichilatori è
$$\frac{e^{\alpha t}}{\lambda(\alpha)}$$

(E.3) Sia g la funzione continua definita da
$$g(t) = \begin{cases} 0 & \text{per } t \leqslant 0 \\ t & \text{per } t > 0 \end{cases}$$

a) Determinare l'insieme A delle soluzioni dell'equazione differenziale $L(z) = 0$.

b) Determinare l'insieme B delle soluzioni dell'equazione differenziale $L(z) = t$.

Sia u_A un elemento di A.

c) Determinare $u_B \in B$ tale che
$$u_B(0) = u_A(0) \quad , \quad u_B^{(1)}(0) = u_A^{(1)}(0) \quad , \quad u_B^{(2)}(0) = u_A^{(2)}(0)$$

d) Mostrare che la funzione v definita da
$$v(t) = \begin{cases} u_A(t) & \text{per } t \leqslant 0 \\ u_B(t) & \text{per } t > 0 \end{cases}$$
è una soluzione dell'equazione $L(z) = g$.

(E.4) Sia $\tau \in \mathbb{R}$. Per $w \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, si indichi con $[w] \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ la funzione definita, per ogni $t \in \mathbb{R}$, da $[w](t) = w(t - \tau)$. Si osservi che w e $[w]$ sono nella stessa classe di regolarità.

a) Verificare che per ogni $w \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ si ha $[w]^{(1)} = [w^{(1)}]$ e, di conseguenza, per ogni $m > 1$ e per ogni $w \in \mathcal{C}^m(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ si ha $[w]^{(m)} = [w^{(m)}]$.

Sia r una funzione continua.

b) Verificare che per ogni $w \in \mathcal{C}^3(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ si ha $L([w]) = [L(w)]$.

c) Verificare che se w è soluzione dell'equazione $L(z) = r$ allora $[w]$ è soluzione dell'equazione $L(z) = [r]$.

1.8 Appendice

Per comodità di chi legge si riporta in questa Sezione un risultato utilizzato nell'Esempio 1.9.

1.30 Teorema
Siano $p_1(Z), p_2(Z) \in \mathbb{C}[Z]$ primi tra loro. Esistono $a(Z), b(Z) \in \mathbb{C}[Z]$ tali che
$$1 = a(Z)p_1(Z) + b(Z)p_2(Z)$$

Dimostrazione (★)
Supponiamo grado $p_1(Z) \geqslant$ grado $p_2(Z)$. Applicando l'algoritmo di Euclide si ottenga, ad esempio:
$$\begin{array}{rl} \text{(I)} & p_1(Z) = p_2(Z)q_1(Z) + r_1(Z) \\ \text{(II)} & p_2(Z) = r_1(Z)q_2(Z) + r_2 \\ \text{(III)} & r_1(Z) = r_2 q_3(Z) \end{array}$$

con $r_2 \in \mathbb{C}$ non zero. Dalla (II) si ottiene:

$$r_2 = p_2(Z) - r_1(Z)q_2(Z)$$

e, utilizzando l'espressione di $r_1(Z)$ ottenuta da (I):

$$r_2 = p_2(Z) - [p_1(Z) - p_2(Z)q_1(Z)]q_2(Z) = -q_2(Z)p_1(Z) + [1 + q_1(Z)q_2(Z)]p_2(Z)$$

Dividendo per r_2 e ponendo

$$a(Z) = -\frac{q_2(Z)}{r_2} \qquad \text{e} \qquad b(Z) = \frac{1 + q_1(Z)q_2(Z)}{r_2}$$

si ottiene l'asserto. $\square$

Capitolo 2

Sistemi di equazioni differenziali lineari a coefficienti costanti

Sia J un intervallo aperto non vuoto di $\mathbb{R}$, n un intero positivo e sia $f : J \to \mathbb{C}^n$ una funzione *a valori in* $\mathbb{C}^n$. Se per ogni $t \in J$ si ha $f(t) \in \mathbb{R}^n$, f è una *funzione a valori reali.*

In $\mathbb{C}^n$ si consideri la usuale norma indotta dal prodotto hermitiano canonico, e si indichino con $e_1, \dots, e_n$ gli elementi della base canonica.

Si ricordi che la funzione f è continua su J se per ciascuna componente f_j di f si ha $f_j \in \mathcal{C}(J, \mathbb{C})$. Analogamente, per m intero positivo, f è di classe $\mathcal{C}^m$ su J se per ciascuna componente di f si ha $f_j \in \mathcal{C}^m(J, \mathbb{C})$. Infine, f è di classe $\mathcal{C}^\infty$ su J se f è di classe $\mathcal{C}^m$ su J per ogni intero positivo m.

L'insieme delle funzioni a valori in $\mathbb{C}^n$ continue su J si indica con $\mathcal{C}(J, \mathbb{C}^n)$ o, equivalentemente, con $\mathcal{C}^0(J, \mathbb{C}^n)$; quello delle funzioni a valori in $\mathbb{C}^n$ di classe $\mathcal{C}^m$ su J con $\mathcal{C}^m(J, \mathbb{C}^n)$ e quello delle funzioni a valori in $\mathbb{C}^n$ di classe $\mathcal{C}^\infty$ su J con $\mathcal{C}^\infty(J, \mathbb{C}^n)$.

Si osservi che, con le usuali definizioni di somma e di prodotto per un elemento di $\mathbb{C}$, gli insiemi $\mathcal{C}(J, \mathbb{C}^n)$, $\mathcal{C}^m(J, \mathbb{C}^n)$ e $\mathcal{C}^\infty(J, \mathbb{C}^n)$ sono spazi vettoriali su $\mathbb{C}$.

Per $f \in \mathcal{C}^m(J, \mathbb{C}^n)$, si ricordi infine che $f^{(m)}$ è il vettore di componenti $f_1^{(m)}, \dots, f_n^{(m)}$.

2.1 Definizioni e prime proprietà

2.1 Definizione

Siano $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$, r una funzione a valori in $\mathbb{C}^n$ *continua* su J e $L : \mathcal{C}^1(J, \mathbb{C}^n) \to \mathcal{C}^0(J, \mathbb{C}^n)$ l'applicazione lineare definita da

$$L(z) = z^{(1)} - Az$$

L'equazione

$$L(z) = r \qquad \text{ovvero} \qquad z^{(1)} = Az + r$$

si chiama *sistema di equazioni differenziali lineari a coefficienti costanti del primo ordine.*

Gli elementi del dominio di L che hanno per immagine r, cioè le funzioni $w \in \mathcal{C}^1(J, \mathbb{C}^n)$ tali che $L(w) = r$, si chiamano **soluzioni** del sistema di equazioni differenziali $L(z) = r$.

L'equazione

$$L(z) = 0 \qquad \text{ovvero} \qquad z^{(1)} = Az$$

si chiama *sistema omogeneo associato a* $L(z) = r$.

2.2 Osservazione (struttura dell'insieme delle soluzioni)

Sia $L(z) = r$ un sistema di equazioni differenziali lineari a coefficienti costanti del primo ordine.

Poichè L è lineare, allora: o il sistema non ha soluzioni oppure, detta $\hat{z}$ una soluzione ("soluzione particolare"), l'insieme di *tutte* le soluzioni è

$$\hat{z} + \ker L$$

Si osservi che $\ker L$ — l'insieme delle soluzioni del sistema omogeneo $L(z) = 0$ — è un sottospazio vettoriale di $\mathcal{C}^1(J, \mathbb{C}^n)$.

La Sezione 2.2 è dedicata allo studio del sistema omogeneo $L(z) = 0$. Nella Sezione 2.4 vedremo come determinare una soluzione particolare del sistema mostrando così che l'insieme delle soluzioni è non vuoto.

2.2 Il sistema omogeneo $L(z) = 0$

In questa Sezione si studia l'insieme delle soluzioni di un sistema di equazioni differenziali lineari a coefficienti costanti del primo ordine, omogeneo.

2.3 Osservazione ($\ker L \subset \mathcal{C}^\infty(J, \mathbb{C}^n)$)

Sia $L(z) = 0$ un sistema di equazioni differenziali lineari a coefficienti costanti del primo ordine, omogeneo.

Ragionando come nell'Osservazione 1.4 si prova che l'insieme delle soluzioni del sistema, cioè $\ker L$, è un sottospazio di $\mathcal{C}^\infty(J, \mathbb{C}^n)$.

2.4 Definizione (condizioni iniziali)

Sia $L(z) = r$ un sistema di equazioni differenziali lineari a coefficienti costanti del primo ordine. Siano $t_0 \in J$ e $z_0 \in \mathbb{C}^n$.

Una funzione w è una soluzione del sistema di equazioni differenziali che verifica le *condizioni iniziali (all'istante t_0)* $z(t_0) = z_0$ se

$$w \in \mathcal{C}^1(J, \mathbb{C}^n) \quad , \quad L(w) = r \qquad \text{e} \qquad w(t_0) = z_0$$

2.5 Teorema (di esistenza ed unicità per sistemi omogenei)

Sia $z^{(1)} - Az = 0$ un sistema di equazioni differenziali lineari a coefficienti costanti del primo ordine, omogeneo, e siano $b \in \mathbb{C}^n$ e $t_0 \in J$.

a) Esiste una sola soluzione del sistema che verifica la condizione iniziale $z(t_0) = b$.

b) Sia $p(Z) \in \mathbb{C}[Z]$ il polinomio caratteristico della matrice A. Le componenti della soluzione del sistema che verifica la condizione iniziale $z(t_0) = b$ sono elementi del nucleo dell'operatore differenziale $p(D)$.

c) L'applicazione che associa a b la soluzione del sistema che verifica la condizione iniziale $z(t_0) = b$ è un isomorfismo tra $\mathbb{C}^n$ e $\ker L$ e quindi, analogamente al caso delle equazioni, il nucleo di L è un sottospazio vettoriale di $\mathcal{C}^\infty(J, \mathbb{C}^n)$ di dimensione n.

Dimostrazione (★)

Siano $M \in \mathbb{C}^{n \times n}$ invertibile, $\Theta \in \mathbb{C}^{n \times n}$ triangolare superiore (cioè $\theta_{ij} = 0$ per $i > j$) tali che $A = M\Theta M^{-1}$ (l'esistenza di matrici con queste proprietà è assicurata dal Teorema 2.13 dell'Appendice 2.8).

Si verifica facilmente che:

- se w è una soluzione del sistema di equazioni differenziali $z^{(1)} = Az$ che verifica la condizione iniziale $z(t_0) = b$ allora $v = M^{-1}w$ è una soluzione del sistema di equazioni differenziali $z^{(1)} = \Theta z$ che verifica la condizione iniziale $z(t_0) = M^{-1}b$;
- se v è una soluzione del sistema di equazioni differenziali $z^{(1)} = \Theta z$ che verifica la condizione iniziale $z(t_0) = b$ allora $w = Mv$ è una soluzione del sistema di equazioni differenziali $z^{(1)} = Az$ che verifica la condizione iniziale $z(t_0) = Mb$.

Per provare l'asserto a) è quindi sufficiente mostrare che per ogni $b \in \mathbb{C}^n$ esiste una sola soluzione del sistema $z^{(1)} = \Theta z$ che verifica la condizione iniziale $z(t_0) = b$.

Ovviamente, w è una soluzione del sistema $z^{(1)} = \Theta z$ che verifica la condizione iniziale $z(t_0) = b$ se e solo se, dette $w_1, \dots, w_n$ le componenti di w, si ha

n) w_n è una soluzione dell'equazione $z^{(1)} = \theta_{nn}z$ che verifica la condizione iniziale $z(t_0) = b_n$;

n-1) w_{n-1} è una soluzione dell'equazione $z^{(1)} = \theta_{n-1,n-1}z + \theta_{n-1,n}w_n$ che verifica la condizione iniziale $z(t_0) = b_{n-1}$;

$\vdots$

1) w_1 è una soluzione dell'equazione $z^{(1)} = \theta_{11}z + \theta_{12}w_2 + \cdots + \theta_{1n}w_n$ che verifica la condizione iniziale $z(t_0) = b_1$.

Per l'Osservazione 1.19 esiste una sola funzione che verifica n); l'Osservazione 1.22 applicata a ciascuno dei passi successivi prova l'asserto a).

Per provare l'asserto b) occorre dimostrare che $w_n, \dots, w_1 \in \ker p(D)$. A tale scopo, si osservi che $p(Z)$, polinomio caratteristico di A, è anche il polinomio caratteristico di Θ (simile ad A) e quindi, essendo Θ triangolare si ha $p(Z) = (\theta_{11} - Z)\cdots(\theta_{nn} - Z)$. Adesso: $w_n \in \ker(D - \theta_{nn}) \subset \ker p(D)$. Allora per w_{n-1} si ha $(D - \theta_{n-1,n-1})w_{n-1} \in \ker(D - \theta_{nn})$ e quindi $w_{n-1} \in \ker(D - \theta_{nn})(D - \theta_{n-1,n-1}) \subset \ker p(D)$. Ragionando allo stesso modo si prova che anche le altre componenti sono in $\ker p(D)$.

Per provare l'asserto c), si consideri l'applicazione lineare $\rho_{t_0} : \ker L \to \mathbb{C}^n$ definita da $\rho_{t_0}(z) = z(t_0)$. Tenuto conto di quanto asserito al punto a), l'applicazione risulta iniettiva e surgettiva, e quindi un isomorfismo tra $\ker L$ e $\mathbb{C}^n$. L'inversa è dunque anch'essa un isomorfismo. $\square$

2.6 Definizione (matrice risolvente)

Sia $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ e, per $j = 1, \dots, n$, sia $u_j \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{C}^n)$ la soluzione del sistema omogeneo $z^{(1)} - Az = 0$ che verifica la condizione iniziale $z(0) = e_j$.

La funzione $W : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^{n\times n}$ definita da

$$W = (u_1, \dots, u_n)$$

si chiama *matrice risolvente associata ad A*.

Si osservi che, per l'Osservazione 2.3, si ha $u_j \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C}^n)$.

2.7 Osservazione (descrizione di $\ker L$)

Siano $L(z) = z^{(1)} - Az = 0$ un sistema di equazioni differenziali lineari a coefficienti costanti del primo ordine, omogeneo, $W = (u_1, \dots, u_n)$ la matrice risolvente associata ad A, e $b \in \mathbb{C}^n$ di componenti $b_1, \dots, b_n$.

a) Sia $J = \mathbb{R}$. Per il punto c) del Teorema 2.5, $u_1, \dots, u_n$ è una base di $\ker L$ e la soluzione del sistema $L(z) = 0$ che verifica la condizione iniziale $z(0) = b = b_1e_1 + \cdots + b_ne_n$ è

$$b_1u_1(t) + \cdots + b_nu_n(t) = W(t)b$$

b) Siano $J = \mathbb{R}$ e $t_0 \in \mathbb{R}$. Per ogni $v \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{C}^n)$ si indichi con $[v] \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{C}^n)$ la funzione definita, per ogni $t \in \mathbb{R}$, da $[v](t) = v(t - t_0)$. Per $v \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{C}^n)$ si ha $[v] \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{C}^n)$ e $[v]^{(1)} = [v^{(1)}]$ e quindi $L([v]) = [L(v)]$. Ne segue facilmente che, se w è la soluzione del sistema $L(z) = 0$ che verifica la condizione iniziale $z(0) = b$, la funzione $[w]$ è la soluzione del sistema che verifica la condizione iniziale $z(t_0) = b$. Dunque, tenuto conto dell'espressione per w che si deduce dal punto a), la soluzione del sistema $L(z) = 0$ che verifica la condizione iniziale $z(t_0) = b$ è

$$b_1 u_1(t - t_0) + \cdots + b_n u_n(t - t_0) = W(t - t_0)b$$

c) Sia $t_0 \in J$ (ma non necessariamente $J = \mathbb{R}$). Poiché la restrizione a J della funzione $W(t - t_0)b$ è una soluzione del sistema che assume valore b in t_0, per il punto a) del Teorema 2.5 l'isomorfismo σ tra $\mathbb{C}^n$ e $\ker L$ che associa a b la soluzione del sistema che verifica la condizione iniziale $z(t_0) = b$ è

$$\sigma(b) = \text{la restrizione a } J \text{ di } W(t - t_0)b$$

e quindi

$$\ker L \quad = \quad \begin{array}{l} \text{lo spazio che si ottiene considerando, per ogni} \\ b \in \mathbb{C}^n, \text{ la restrizione a } J \text{ di } W(t - t_0)b \end{array}$$

2.3 Calcolo della matrice risolvente

Siano $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ e W la matrice risolvente associata ad A. Per definizione, per calcolare W occorre calcolare, per $j = 1, \ldots, n$, la soluzione $u_j \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C}^n)$ del sistema $z^{(1)} - Az = 0$, che verifica la condizione iniziale $z(0) = e_j$.

Esponiamo un procedimento che consente di calcolare, dati $t_0 \in \mathbb{R}$ e $b \in \mathbb{C}^n$, la soluzione $w \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C}^n)$ del sistema $z^{(1)} - Az = 0$ che verifica la condizione iniziale $z(t_0) = b$. Dopo aver dato un esempio, lo giustifichiamo.

2.8 Procedura

1) Calcolare il polinomio caratteristico $p(Z)$ della matrice A, che risulta un polinomio di grado n, e considerare l'operatore differenziale $p(D)$ in $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.

2) Determinare una base di $\ker p(D)$ – sia $\phi_1, \ldots, \phi_n$.

3) Determinare $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{C}^n$ in modo che la combinazione lineare

$$v = c_1 \phi_1 + \cdots + c_n \phi_n$$

verifichi le condizioni

$$v(0) = b \quad , \quad v^{(1)}(0) = Ab \quad , \ldots , \quad v^{(n-1)}(0) = A^{n-1}b$$

Infine: $w = v$.

2.9 Esempio

Sia $n = 2$ e

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Illustriamo come utilizzare la procedura descritta sopra per calcolare le colonne u_1 e u_2 della matrice risolvente associata ad A.

1) $p(Z) = Z^2 - 2Z + 1 = (Z-1)^2$ – polinomio di grado $n = 2$ – e quindi $p(D) = (D-1)^2$.

2) $\ker p(D) = \ker(D-1)^2 = \langle e^t, te^t \rangle$.

3.1) si cercano $c_1, c_2 \in \mathbb{C}^2$ tali che, posto

$$v(t) = c_1 e^t + c_2 t e^t$$

sia

$$v(0) = c_1 = e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad , \quad v^{(1)}(0) = c_1 + c_2 = Ae_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Si ottiene

$$c_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad , \quad c_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

e quindi

$$u_1(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} e^t + \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} te^t$$

3.2) si cercano $c_1, c_2 \in \mathbb{C}^2$ tali che, posto

$$v(t) = c_1 e^t + c_2 t e^t$$

sia

$$v(0) = c_1 = e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad , \quad v^{(1)}(0) = c_1 + c_2 = Ae_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Si ottiene

$$c_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad , \quad c_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

e quindi

$$u_2(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} e^t + \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} te^t$$

Infine:

$$W(t) = (u_1(t), u_2(t)) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} e^t + \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} te^t$$

Dimostrazione della Procedura 2.8 (★)

Per il punto a) del Teorema 2.5, esiste una sola soluzione w del sistema $z^{(1)} - Az = 0$ che verifica la condizione iniziale $z(t_0) = b$. La soluzione w verifica le condizioni:

I) per tutte le componenti w_j di w si ha $w_j \in \ker p(D)$

II) $w(t_0) = b, w^{(1)}(t_0) = Ab, \dots, w^{(n-1)}(t_0) = A^{n-1}b$

La condizione I) segue dal punto b) del Teorema 2.5; la condizione II) dal fatto che per $k = 1, \dots, n-1$, la derivata $k-$esima di w vale $A^k w$.

Poichè $p(D)$ ha grado n, il Teorema 1.20 garantisce che le condizioni I) e II) individuano univocamente le componenti di w. □

2.4 Il sistema non omogeneo $L(z) = r$

In questa Sezione si determina una soluzione di un sistema di equazioni differenziali lineari a coefficienti costanti, non omogeneo.

2.10 Osservazione (proprietà della matrice risolvente)
Siano $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ e W la matrice risolvente associata ad A.
Siano $t_0 \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{C}^n$ e $w \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{C}^n)$ la soluzione del sistema $z^{(1)} - Az = 0$ che verifica la condizione iniziale $z(0) = b$. Per il punto a) dell'Osservazione 2.7 si ha $w(t) = W(t)b$. Questa soluzione, per $t = t_0$, assume valore $W(t_0)b$. Dunque, w è anche la soluzione del sistema che verifica la condizione iniziale $z(t_0) = W(t_0)b$. Allora, ricordando il punto b) dell'Osservazione 2.7, per ogni $t \in \mathbb{R}$ si ha $W(t)b = W(t - t_0)(W(t_0)b)$.
Questo prova che per ogni $t, t_0 \in \mathbb{R}$ si ha $W(t) = W(t - t_0)W(t_0)$. In particolare, per $t = 0$ si ottiene $W(0) = W(-t_0)W(t_0)$ da cui, poiché $W(0) = I$, si ricava

Proprietà 1: per ogni $t \in \mathbb{R}$ la matrice $W(t)$ è invertibile e $W(t)^{-1} = W(-t)$

e

Proprietà 2: per ogni $t, t_0 \in \mathbb{R}$ si ha $W(t - t_0) = W(t)W(t_0)^{-1} = W(t)W(-t_0)$

Infine, per ogni $\phi \in \mathcal{C}^1(J, \mathbb{C}^n)$, dette $u_1, \dots, u_n$ le colonne di W e $\phi_1, \dots, \phi_n$ le componenti di ϕ si ha

Proprietà 3: $(W\phi)^{(1)} = (\phi_1 u_1 + \cdots + \phi_n u_n)^{(1)} = W\phi^{(1)} + AW\phi$

2.11 Teorema (di esistenza ed unicità per sistemi non omogenei)
Siano $L(z) = z^{(1)} - Az = r$ un sistema di equazioni differenziali lineari a coefficienti costanti del primo ordine, W la matrice risolvente associata ad A e siano $b \in \mathbb{C}^n$ e $t_0 \in J$.
Posto

$$f(t) = W(t) \int_{t_0}^{t} W(-\tau) r(\tau)\, \mathrm{d}\tau$$

si ha:

1) f è una soluzione del sistema e quindi l'insieme (non vuoto) delle soluzioni del sistema è

$$f + \ker L$$

Inoltre, se $r \in \mathcal{C}^m(J, \mathbb{C}^n)$ per un intero $m \geqslant 0$ si ha $f \in \mathcal{C}^{m+1}(J, \mathbb{C}^n)$ e quindi tutte le soluzioni del sistema sono in $\mathcal{C}^{m+1}(J, \mathbb{C}^n)$.

2) L'*unica* soluzione del sistema che verifica la condizione iniziale $z(t_0) = b$ è

$$f(t) + W(t - t_0)b$$

Analogamente al caso delle equazioni, f — la soluzione del sistema che verifica la condizione iniziale $z(t_0) = 0$ — si chiama "**soluzione forzata**" e $W(t - t_0)b$ — la soluzione del sistema omogeneo $L(z) = 0$ che verifica la condizione iniziale $z(t_0) = b$ — "**soluzione libera**".

Dimostrazione (★)
1) Sia

$$\phi = W^{-1} f = \int_{t_0}^{t} W(-\tau) r(\tau)\, \mathrm{d}\tau \qquad \text{e quindi} \qquad f = W\phi$$

Poiché $W(-t)r(t) \in \mathcal{C}^0(J, \mathbb{C}^n)$ si ha $\phi \in \mathcal{C}^1(J, \mathbb{C}^n)$ e quindi anche $f \in \mathcal{C}^1(J, \mathbb{C}^n)$. Inoltre, per la Proprietà 3 dell'Osservazione 2.10, si ha

$$f^{(1)} = (W\phi)^{(1)} = AW\phi + W\phi^{(1)} = Af + W\phi^{(1)}$$

Ricordando che per il teorema fondamentale del calcolo integrale si ha $\phi^{(1)}(t) = W(-t)r(t)$, utilizzando la Proprietà 1 dell'Osservazione 2.10 si ottiene

$$L(f) = f^{(1)} - Af = r$$

dunque f è soluzione del sistema.

2) Poiché $f(t_0) = 0$ e $W(t - t_0)b$ è la soluzione del sistema omogeneo associato $L(z) = 0$ che verifica la condizione iniziale $z(t_0) = b$, per la linearità di L la somma $f(t) + W(t - t_0)b$ è *una* soluzione del sistema $L(z) = r$ che verifica la condizione iniziale $z(t_0) = b$.

L'unicità si ottiene osservando che se w_1 e w_2 sono soluzioni del sistema che verificano la condizione iniziale $z(t_0) = b$, allora $w_1 - w_2$ è soluzione del sistema omogeneo associato e verifica la condizione iniziale $z(t_0) = 0$ e quindi, per il teorema di esistenza ed unicità per sistemi omogenei, si ha $w_1 = w_2$. □

2.5 Sistemi di equazioni differenziali reali

In questa Sezione si considera un sistema di equazioni differenziali $z^{(1)} - Az = r$ in cui $A \in \mathbf{R}^{n\times n}$ e $r \in \mathcal{C}(J, \mathbb{C}^n)$ è una funzione a *valori reali* — un sistema di tal genere si chiama *sistema di equazioni differenziali reale* — e se ne cercano le *soluzioni a valori reali.*

2.12 Osservazione

Sia $z^{(1)} - Az = 0$ un sistema di equazioni differenziali reale, omogeneo, e siano $b \in \mathbb{R}^n$ e $t_0 \in J$. Sia infine $w \in \mathcal{C}^1(J, \mathbb{C}^n)$ la soluzione del sistema che verifica le condizioni iniziali $z(t_0) = b$. Ragionando come nell'Osservazione 1.29 si prova che w è una funzione a valori reali. Allora:

a) detta W la matrice risolvente associata ad A, per ogni $t \in J$ si ha $W(t) \in \mathbf{R}^{n\times n}$; e quindi tutte le soluzioni a valori reali dell'equazione si ottengono da

$$Wb \quad , \quad b \in \mathbb{R}^n$$

b) se $r \in \mathcal{C}^0(J, \mathbb{C}^n)$ è a valori reali, allora l'unica soluzione del sistema che verifica le condizioni iniziali $z(t_0) = b$ (quella descritta nel Teorema 2.11) è a valori reali.

2.6 Problemi test

(T.1) Sia $p(Z) = (1 - Z)^2$ il polinomio caratteristico di $A \in \mathbb{C}^{2\times 2}$. Per ciascuna funzione, indicare se può essere soluzione del sistema di equazioni differenziali $z^{(1)} = Az$:

$$(a)\ \begin{bmatrix} e^{2t} \\ t \end{bmatrix} \qquad (b)\ \begin{bmatrix} te^t \\ 2 \end{bmatrix} \qquad (c)\ \begin{bmatrix} e^t \\ e^t - te^t \end{bmatrix}$$

(T.2) Siano $J = \mathbb{R}$, $n = 2$ e sia $L(z) = 0$ un sistema di equazioni differenziali lineari, omogeneo. Per ciascun asserto, indicare se è vero o falso:

a) $\dim \ker L = 4$;

b) siano $z_1, z_2 \in \ker L$ tali che $z_1(0) = z_2(0)$; allora $z_1 = z_2$;

c) $\ker L \subset \mathcal{C}^\infty(J, \mathbb{C}^2)$;

d) siano w_1 la soluzione del sistema che verifica le condizioni iniziali

$$z(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

e w_2 quella che verifica le condizioni iniziali

$$z(0) = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

allora la soluzione del sistema che verifica le condizioni iniziali

$$z(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

è $w_1 - 2w_2$.

e) siano w_1 e w_2 come in d); allora $\ker L = \langle w_1, w_2 \rangle$.

(T.3) Sia

$$W(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} e^t + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} te^t$$

la matrice risolvente associata ad $A \in \mathbb{C}^{2\times 2}$, e sia $L(z) = z^{(1)} - Az$. Per ciascun asserto, indicare se è vero o falso:

a) $\ker L = \langle \begin{bmatrix} e^t \\ -te^t \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} te^t \\ e^t \end{bmatrix} \rangle$;

b) $(W(t))^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} e^t - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} te^t$;

c) la soluzione del sistema $L(z) = 0$ che verifica la condizione iniziale $z(1) = e_1$ è

$$\begin{bmatrix} e^{t-1} \\ -(t-1)e^{t-1} \end{bmatrix}$$

2.7 Esercizi

(E.1) Siano $n = 1$, $A = \alpha \in \mathbb{C}^{1\times 1}$ e $r \in \mathcal{C}^0(J, \mathbb{C}^1)$. Dopo aver calcolato la matrice risolvente associata ad A e verificate le proprietà espresse nell'Osservazione 2.10, si confronti l'espressione della soluzione forzata del sistema $L(z) = r$ che si ottiene dal Teorema 2.11 con quella della soluzione indicata nell'Osservazione 1.12.

2.8 Appendice

Per comodità di chi legge si riporta in questa Sezione un risultato utilizzato nella dimostrazione del Teorema 2.5.

2.13 Teorema (triangolarizzazione)
Sia $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Esistono $M \in \mathbb{C}^{n\times n}$ invertibile e $\Theta \in \mathbb{C}^{n\times n}$ triangolare superiore tali che

$$M^{-1}AM = \Theta \quad \text{ovvero} \quad AM = M\Theta$$

Dimostrazione (★)

Per k intero positivo, sia $P(k)$ il seguente asserto: per ogni $A \in \mathbb{C}^{k\times k}$ esistono $M \in \mathbb{C}^{k\times k}$ invertibile e $\Theta \in \mathbb{C}^{k\times k}$ triangolare superiore tali che $AM = M\Theta$.

$P(1)$ è vero: assegnata $A \in \mathbb{C}^{1\times 1}$, posto $M = 1$ e $\Theta = A$ si ha $AM = M\Theta$.

Adesso procediamo per induzione: supponiamo vero $P(m-1)$ per un intero $m \geqslant 2$ e mostriamo che, allora, anche $P(m)$ è vero.

Dobbiamo mostrare come, assegnata $A \in \mathbb{C}^{m\times m}$, utilizzando $P(m-1)$ si possano calcolare $M \in \mathbb{C}^{m\times m}$ invertibile e $\Theta \in \mathbb{C}^{m\times m}$ triangolare superiore tali che $AM = M\Theta$.

Sia $\lambda \in \mathbb{C}$ un autovalore di A e $v \in \mathbb{C}^m$ un autovettore di A associato a λ. Si scelgano $v_2, \ldots, v_m \in \mathbb{C}^m$ tali che $v, v_2, \ldots, v_m$ sia una base di $\mathbb{C}^{m\times m}$. Posto $N = (v, v_2, \ldots, v_m) \in \mathbb{C}^{m\times m}$, la matrice N risulta invertibile e, per come scelti λ e v, si ha

$$AN = N \begin{bmatrix} \lambda & \rho \\ 0 & \mu \end{bmatrix}$$

per opportuni $\rho \in \mathbb{C}^{1\times(m-1)}$ e $\mu \in \mathbb{C}^{(m-1)\times(m-1)}$.

Poiché l'asserto $P(m-1)$ è vero, data $\mu \in \mathbb{C}^{(m-1)\times(m-1)}$ esistono $\nu \in \mathbb{C}^{(m-1)\times(m-1)}$ invertibile e $\tau \in \mathbb{C}^{(m-1)\times(m-1)}$ triangolare superiore tali che $\mu\nu = \nu\tau$.

Si ponga

$$M = N \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \nu \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{m\times m}$$

e

$$\Theta = \begin{bmatrix} \lambda & \rho\nu \\ 0 & \tau \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{m\times m}$$

La matrice M risulta invertibile (perché lo sono N e ν), e Θ triangolare superiore (perché lo è τ). Inoltre

$$AM = AN \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \nu \end{bmatrix} = N \begin{bmatrix} \lambda & \rho \\ 0 & \mu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \nu \end{bmatrix} = N \begin{bmatrix} \lambda & \rho\nu \\ 0 & \mu\nu \end{bmatrix}$$

e

$$M\Theta = N \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \nu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda & \rho\nu \\ 0 & \tau \end{bmatrix} = N \begin{bmatrix} \lambda & \rho\nu \\ 0 & \nu\tau \end{bmatrix}$$

Poiché $\mu\nu = \nu\tau$, si ottiene $AM = M\Theta$. Dunque $P(m)$ è vero. □