Es. 1 : $\forall \theta \in \mathbb{R}$, si consideri l'appl. lineare

$$\mathcal{R}(\theta) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$ "rotazione in senso antiorario di θ rad."

(A) Determinare $\mathcal{R}(\theta)(e_1)$ ed $\mathcal{R}(\theta)(e_2)$;

(B) determinare $R(\theta) \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ t.c. $\mathcal{R}(\theta)(v) = R(\theta)v$

(C) decidere se $\exists\, \theta \in [0, 2\pi)$ t.c. $R(\theta) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

(matrice che rappresenta la riflessione rispetto alla bisettrice)

(D) la riflessione rispetto alla bisettrice è una rotazione ?

Es. 2 : Siano $a, b \in \mathbb{R}^2$ e si consideri l'insieme

$$s(a,b) = \{ x \in \mathbb{R}^2 \mid x = (1-\lambda)a + \lambda b, \ \lambda \in [0,1] \}$$

(A) verificare (con un disegno) che $s(a,b)$ è il <u>segmento di estremi a, b</u>.

Sia $\mathcal{L} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ una applicazione lineare.

(B) Verificare che l'immagine di $s(a,b)$ tramite $\mathcal{L}$ è il segmento di estremi $\mathcal{L}(a)$, $\mathcal{L}(b)$, ovvero verificare che

$$\forall \lambda \in [0,1], \quad \mathcal{L}\big((1-\lambda)a + \lambda b\big) = (1-\lambda)\mathcal{L}(a) + \lambda \mathcal{L}(b)$$

(C) Posto $a = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ ed $\mathcal{L} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ t.c.

$$\mathcal{L}(v) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} v$$

determinare l'immagine di $s(a,b)$ tramite $\mathcal{L}$.

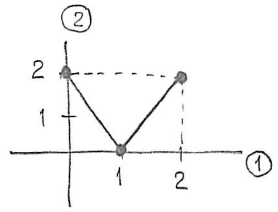
(D) Dare una descrizione geometrica di $\mathcal{L}$.

Es. 3 : Sia $\mathcal{T}: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ t.c. $\mathcal{T}(v) = 2v$ l'applicazione "ingrandimento di fattore 2."

(A) Decidere se $\mathcal{T}$ è lineare;

(B) determinare $M \in \mathbb{R}^{2\times 2}$: $\forall v \in \mathbb{R}^2$, $\mathcal{T}(v) = Mv$;

(C) sia $\mathcal{V}$ l'insieme rappresentato in figura.



Determinare l'immagine di $\mathcal{V}$ tramite $\mathcal{T}$.

Es. 4 : Sia $M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & i \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & i & i \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{4\times 3}$

(A) determinare $\operatorname{im}(M)$ e $\operatorname{rk}(M)$

(B) determinare $\ker(M)$

(C) dato $v \in \mathbb{C}^4$, quante soluzioni può avere l'equazione $Mx = v$?

(D) Indicare $w \in \mathbb{C}^4$ t.c. l'equazione $Mx = w$ non ha soluzioni.

Es. 5 : Siano $M \in \mathbb{C}^{2\times 4}$ e $v \in \mathbb{C}^2$.

(A) Quante soluzioni può avere l'equazione $Mx = v$?

Posto $M = \begin{bmatrix} 3 & 3i & 0 & 3+3i \\ i & -1 & 0 & i-1 \end{bmatrix}$,

(B) determinare $\operatorname{im}(M)$ e $\ker(M)$

(C) determinare $v \in \mathbb{C}^2$ t.c. l'equazione $Mx = v$ non ha soluzioni.

Es. 6 : Sia $M = \begin{bmatrix} -2 & 6 \\ 6 & -2 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{2\times 2}$;

(A) decidere se $\lambda = 2$ è autovalore;
(B) determinare lo spettro di M;
(C) determinare la molteplicità algebrica e geometrica di ciascun autovalore;
(D) determinare gli autospazi relativi a ciascun autovalore.

Es. 7 : Sia $M = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{2\times 2}$.

(A) Determinare lo spettro di M;
(B) determinare la molteplicità algebrica e geometrica di ciascun autovalore.

Es. 8 : Sia $A \in \mathbb{C}^{2\times 2}$ diagonalizzabile, di autovalori $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$.

(A) Verificare che A^2 è simile a $\mathrm{diag}(\lambda_1^2, \lambda_2^2)$;
(B) Se $\lambda_1 = 2i$ e $\lambda_2 = -3$, quali sono gli autovalori di A^{21} ?

Es. 9 : Siano

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

(A) determinare lo spettro di A e di B;
(B) per ciascun autovalore, determinare le molteplicità algebrica e geometrica;
(C) decidere se A e B sono simili.