Dipartimento di Matematica Applicata
« Ulisse Dini »

Problemi di
Complementi di Algebra e Fondamenti di Geometria

Corso di Laurea in Ingegneria Elettrica

a.a. 2008/2009

1 Forma Canonica di Jordan

In questa Sezione la sigla FCJ(A) indica "la" forma canonica di Jordan di $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Inoltre, per ogni $\lambda \in \mathbb{C}$ utilizzeremo le abbreviazioni seguenti:

$$J_1(\lambda) = \lambda \in \mathbb{C}^{1\times 1} \quad , \quad J_2(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ & \lambda \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{2\times 2} \quad , \quad J_3(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & \\ & \lambda & 1 \\ & & \lambda \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{3\times 3} \ldots$$

`Problema 1`

Per ciascuna delle seguenti matrici (tutte ad elementi in $\mathbb{C}$) determinare la forma canonica di Jordan ed una matrice che realizza la similitudine — cioè una $C \in \mathbb{C}^{n\times n}$ *invertibile* tale che $AC = C\,\mathrm{FCJ}(A)$. Nella soluzione si riporta solo la FCJ(A): per la matrice che realizza la similitudine, si raccomanda di *verificare la risposta*!

(a) $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -5 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ [Soluzione: $\mathrm{FCJ}(A) = \mathrm{diag}(J_1(1), J_2(2))$]

(b) $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ [Soluzione: $\mathrm{FCJ}(A) = \mathrm{diag}(J_1(0), J_3(2))$]

(c) $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ [Soluzione: $\mathrm{FCJ}(A) = \mathrm{diag}(J_2(2), J_2(0))$]

(d) $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ [Soluzione: $\mathrm{FCJ}(A) = J_4(0)$]

(e) $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ [Soluzione: $\mathrm{FCJ}(A) = \mathrm{diag}(J_2(0), J_2(0))$]

(f) $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ [Soluzione: $\mathrm{FCJ}(A) = \mathrm{diag}(J_1(2), J_2(2))$]

`Problema 2`

Sia A, ad elementi in $\mathbb{C}$, una matrice di polinomio caratteristico $P_A(x) = (1-x)(i-x)(-x)^2$. Indicare le possibili FCJ(A).

`Problema 3`

Siano $A, B \in \mathbb{C}^{5\times 5}$ tali che:

- $\sigma(A) = \sigma(B) = \{\, i, -i \,\}$
- m.a.$(i) = 2$ e m.g.$(i) = 1$, sia come autovalore di A che di B
- m.a.$(-i) = 3$ e m.g.$(-i) = 2$, sia come autovalore di A che di B

Decidere se A e B siano *simili.*

`Problema 4`

Siano $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Per ciascuno dei seguenti asserti, decidere se sia *vero* o *falso*:

(a) Se A è simile a B, allora A e B hanno lo stesso polinomio caratteristico.

(b) Se A è simile a B, allora $\sigma(A) = \sigma(B)$.

(c) Se A è simile a B e λ è autovalore, allora la molteplicità algebrica di λ come autovalore di A e come autovalore di B è la stessa.

(d) Se A è simile a B e λ è autovalore, allora la molteplicità geometrica di λ come autovalore di A e come autovalore di B è la stessa.

2 Norme in Spazi Vettoriali e Norme di Matrici

Questa Sezione è suddivisa in due sottosezioni. Nella prima sono presentati problemi riguardanti spazi vettoriali di dimensione *finita*. Nella seconda sono presentati problemi riguardanti spazi vettoriali di dimensione *infinita* allo scopo di evidenziare come, *contrariamente al caso degli spazi di dimensione finita*, negli spazi di dimensione infinita *le norme* *non sono tutte equivalenti* e *le applicazioni lineari* *non sono tutte continue.*

Spazi di dimensione finita

`Problema 1`
La posizione all'istante $t \in \mathbb{R}$ di un punto in moto su un piano è specificata dal vettore

$$p(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ t \end{bmatrix}$$

Dopo aver disegnato la traiettoria del punto, indicare a quali istanti sia minima la norma

$$||p(t)||_2 \quad , \quad ||p(t)||_1 \quad , \quad ||p(t)||_\infty$$

`Problema 2`
Disegnare l'insieme degli elementi $P \in \mathbb{R}^2$ tali che

(a) $||P - \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}||_2 \leqslant 1$

(b) $||P - \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}||_\infty \leqslant 1$

`Problema 3`
Siano

$$a = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} \quad , \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}$$

e $c = a + b$.

Secondo il Teorema di Pitagora, dette $\underline{a}, \underline{b}$ e $\underline{c}$ le lunghezze dei segmenti che rappresentano i tre elementi sul piano, si ha:

$$\underline{a}^2 + \underline{b}^2 = \underline{c}^2$$

Decidere se sia vero che $N(a)^2 + N(b)^2 = N(c)^2$ quando $N(v) = ||v||_2$, $N(v) = ||v||_1$ e $N(v) = ||v||_\infty$.

`Problema 4`
Sia Ω un sottoinsieme di $\mathbb{R}^n$. Una *distanza* in Ω è una funzione $\delta : \Omega \times \Omega \to \mathbb{R}$ tale che

(i) $\delta(x, y) \geq 0$ per ogni $x, y, \in \Omega$

(ii) Se $\delta(x, y) = 0$ allora $x = y$

(iii) $\delta(x, y) = \delta(y, x)$ per ogni $x, y, \in \Omega$

(iv) $\delta(x, y) \leq \delta(x, z) + \delta(z, y)$ per ogni $x, y, z \in \Omega$

Si consideri in $\mathbb{R}^n$ una *norma* N. Verificare che la funzione $d : \Omega \times \Omega \to \mathbb{R}$ definita da

$$d(x, y) = N(x - y)$$

è una distanza in Ω (*la* distanza *indotta* da N).

`Problema 5`

Si consideri in $\mathbb{R}^2$ la norma $||x||_1 = |x_1| + |x_2|$, e sia δ la distanza indotta da tale norma.

Posto

$$A = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} \quad , \quad B = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad O = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

determinare la distanza tra A e B, e decidere quale dei punti disti *meno* da O.

Indicare come cambiano le risposte se si considera la distanza indotta dalla norma $N_2(x) = ||x||_2$.

`Problema 6`

Si considerino $\mathbb{R}^2$ con prodotto scalare canonico e norma da esso indotta, e $\theta \in [0, 2\pi)$. Posto

$$Q = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad v_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

(1) si dia una descrizione geometrica dell'applicazione lineare $x \to Qx$;

(2) si verifichi, che la successione in $\mathbb{R}^2$ generata a partire da v_0 con la regola $v_k = Qv_{k-1}$ $(k = 1, 2, \ldots)$ è *limitata* — ovvero che esiste $L \in \mathbb{R}$ tale che per ogni k si ha $||v_k|| \leqslant L$;

(3) posto $\theta = \frac{\pi}{4}$, decidere se la successione sia *convergente*;

(4) per ogni θ, verificare che la matrice Q è ortogonale e calcolare, utilizzando la definizione, $||Q||$.

`Problema 7`

Si consideri $\mathbb{R}^2$ con norma $N(v) = ||v||_\infty$ e siano

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad v_0 = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

(1) Dare una descrizione geometrica dell'applicazione lineare $x \to Mx$.

(2) Sia v_k la successione di elementi di $\mathbb{R}^2$ generata a partire da v_0 con la regola $v_k = Mv_{k-1}$ $(k = 1, 2, \ldots)$; decidere se la successione sia convergente e, in tal caso, indicare $\lim_{k\to\infty} v_k$.

(3) Determinare l'espressione analitica della successione definita nel punto precedente.

`Problema 8`

Si consideri $\mathbb{R}^2$ con norma $N(v) = ||v||_\infty$ e siano

$$M = (m_1, m_2) \in \mathbb{R}^{2\times 2} \quad \text{e} \quad v_k = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{1}{2^k} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

(1) Determinare $\lim_{k\to\infty} v_k$.

(2) Determinare $\lim_{k\to\infty} Mv_k$ (utilizzare la continuità dell'applicazione lineare definita da M).

Spazi di dimensione infinita

`Problema 9`

Sia V lo spazio vettoriale delle funzioni continue sull'intervallo $[0,1]$ con prodotto scalare definito da

$$f \bullet g = \int_0^1 f(x)g(x)dx$$

e sia N la norma in V indotta da tale prodotto scalare.

Si consideri, infine, la successione di elementi di V definita da $f_k(x) = x^k$.

(A) Determinare $N(f_k)$ e verificare che rispetto alla norma N si ha

$$\lim_{k\to\infty} f_k = 0$$

(B) Verificare che la funzione $N^* : V \to \mathbb{R}$ definita da

$$N^*(f) = \max_{x\in[0,1]} |f(x)|$$

definisce una norma in V.

(C) Determinare $N^*(f_k)$ e verificare che rispetto alla norma N^* si ha

$$\lim_{k\to\infty} f_k \neq 0$$

e quindi che le norme N e N^* *non sono equivalenti*.

(D) Verificare che per ogni $f \in V$ si ha $N(f) \leqslant N^*(f)$ e quindi che *se* per una successione $g_k(x)$ di elementi di V si ha

$$\lim_{k\to\infty} g_k = 0 \quad \text{rispetto alla norma } N^*$$

allora si ha anche

$$\lim_{k\to\infty} g_k = 0 \quad \text{rispetto alla norma } N$$

`Problema 10`

Sia V lo spazio vettoriale delle funzioni derivabili infinite volte su $[0,2\pi]$, e si consideri la successione di elementi di V definita da $f_k(x) = \frac{\operatorname{sen}(kx)}{\sqrt{k}}$. In V si consideri la norma

$$N(f) = \max_{x\in[0,2\pi]} |f(x)|$$

e sia $D : V \to V$ l'applicazione definita da

$$D(f) = f'$$

ovvero l'applicazione che ad $f(x)$ associa la sua derivata prima $f'(x)$.

(A) Verificare che l'applicazione D è lineare.

(B) Determinare $N(f_k)$ e verificare che rispetto alla norma N si ha

$$\lim_{k\to\infty} f_k = 0$$

(C) Per ogni k determinare $D(f_k)$.

(D) Determinare $N(D(f_k))$ e verificare che rispetto alla norma N si ha

$$\lim_{k\to\infty} D(f_k) \neq 0$$

e quindi che l'applicazione lineare D *non è continua*.